

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΜΕΤΑ
ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ
ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΕΡΓΩΝ

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ :

ΕΙΣ ΤΟΝ ΣΕΒΑΣΤΟΝ ΜΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗΝ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΑΙ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ

Κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΝ ΖΕΡΒΟΝ

ΑΘΗΝΑΙ

1946

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ Ἀρχιμήδης εἶναι γνωστός εἰς τοὺς Ἕλληνας ἀπὸ τὴν παράδοσιν καὶ τὴν ἱστορίαν τοῦ τραγικοῦ του θανάτου ἀπὸ ἄξεστον Ῥωμαῖον στρατιώτην καὶ ἀπὸ τὴν ὑδροστατικὴν του καὶ τὰ θεωρήματα περὶ κύκλου, σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ λεχθὲν ὑπὸ τοῦ Leibnitz, ὅτι «ὁ ἐννοῶν τὸν Ἀρχιμήδην θαυμάζει ὀλιγώτερον τὰς ἐφευρέσεις τῶν νεωτέρων σοφῶν» τότε δὲν εἶναι ὑπερβολή, ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι εἶναι ὁ μεγαλύτερος μαθηματικός ποῦ ἐγέννησε μέχρι σήμερον ἡ ἀνθρωπότης.

Ὁ σκοπὸς τῆς ἀποδόσεως τῶν ἔργων του εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν εἶναι νὰ ἱκανοποιήσῃ κατὰ τὸ δυνατόν τὴν ἐπιθυμίαν ἐκείνων τῶν φιλομαθῶν, οἱ ὅποιοι θέλουν νὰ ἴδουν καὶ νὰ θαυμάσουν ἀπὸ κοντὰ τὸ πνεῦμα ἐρεύνης τοῦ μεγίστου τῶν Μαθηματικῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Δυσκολαὶ γλωσσικαί, ἀλλὰ καὶ δυσκολαὶ προερχόμεναι ἀπὸ τὴν ἑλλειψιν τῆς σχετικῆς βιβλιογραφίας ἐν Ἑλλάδι, καθιστοῦν τὴν προσπάθειάν μου ὄχι εὐκόλον. Λόγοι καθαρῶς ἐκδοτικοὶ μὲ ἠνάγκασαν νὰ παραλείψω τὴν ἑκδοσιν τοῦ ἔργου ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I, εἰς πολλὰ μέρη τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἡ διὰ τῶν «μηχανικῶν» ἀπόδειξις τοῦ ἐμβადοῦ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος καὶ νὰ προτάξω τὴν ἑκδοσιν τοῦ τετραγωνισμοῦ τῆς παραβολῆς ἢ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὥς τὴν ὀνομάζει ὁ Ἀρχιμήδης. Θὰ ἐπακολουθήσῃ ἡ ἑκδοσις, ὅταν αἱ συνθῇκαὶ τὸ ἐπιτρέψουν, τῶν ἔργων ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I καὶ II καὶ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, τὰ ὅποια ἔχω σχεδὸν ἔτοιμα.

Κατὰ τὴν μετάφρασίν προσεπάθησα νὰ μὴ ἀποστῶ διόλου τοῦ ἀρχαίου κειμένου, ἐχρησιμοποίησα ὅμως τοὺς σημερινοὺς συνήθεις ὅρους ἐκφράσεως. Ἐντὸς παρενθέσεως ἔθεσα λέξεις ἢ προτάσεις αἱ ὁποῖαι δὲν προέρχονται ἐκ μεταφράσεως. Αὗται ἐτέθησαν πρὸς διευκόλυνσιν τῆς κατανοήσεως τοῦ κειμένου.

Τὸ ἀρχαῖον κείμενον καὶ τὰ σχήματα ἐλήφθησαν ἀπὸ τὴν στερεότυπον ἑκδοσιν τοῦ Δανοῦ Heiberg: Archimedis opera omnia τόμ. II ἑκδοσις 1913 τοῦ ἐκδ. οἴκου Teubner, Λειψία.

Διὰ τὸν «βίον καὶ τὰ ἔργα» τοῦ Ἀρχιμήδους ἐχρησιμοποίησα ὡς πηγὰς 1) τὰς ἐκδόσεις Heiberg, 2) Tannery, *histoire des mathematiques*, 3) G. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, I. 4) E. Hoppe, *Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum*.

Εἶναι αὐτόνόητον ὅτι ὁ «βίος καὶ τὰ ἔργα» τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν εἶναι δυνατόν νὰ περιγραφοῦν εἰς τὸν χῶρον ὀλίγων σελίδων. Ἐλπίζω, ὅτι θὰ εἶμαι εἰς θέσιν, ὅταν αἱ συνθῇκαὶ βελτιωθοῦν, ν' ἀνταποκριθῶ περισσότερον εἰς τὰς ἀπαιτήσεις μιᾶς πληρεστερας περιγραφῆς, ἀξίας τοῦ ὀνόματος τοῦ Ἀρχιμήδους.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου παρέθεσα ἐπεξηγήσεις πρὸς εὐχερεστέραν κατανόησιν ὠρισμένων θεωρημάτων.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Ο ΒΙΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Ο Ἀρχιμήδης ἐγεννήθη εἰς τὰς Συρακούσας, πιθανώτατα τὸ 287 π. Χ. Κατ' ἄλλους ἔζησε μέχρις ἡλικίας 75 ἐτῶν. Ἱστορικῶς εἶναι βέβαιον ὅτι ἐφονεύθη τὸ 212 π.Χ. κατὰ τὴν ἄλωσιν τῶν Συρακουσῶν ἀπὸ τὸν Ῥωμαῖον Μάρκελλον. Ἡ παράδοσις ἀναφέρει ὅτι ὅταν ὁ βάρβαρος Ῥωμαῖος στρατιώτης ἐπλησίασε διὰ νὰ φονεύσῃ τὸν Ἀρχιμήδην, οὗτος τοῦ εἶπε «μὴ μοῦ τοὺς κύκλους τάραιτε» ἢ «ἀπόστηθι, ὦ ἄνθρωπε, τοῦ διαγράμματός μου».

Ὅπως δὴποτε ὅμως πρέπει νὰ ἔζησε μακρὸν βίον καὶ τοῦτο ἐξάγεται ἀπὸ τὸ γεγονός ὅτι ἦτο φίλος τοῦ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ μαθηματικοῦ Κόνωνος, ὁ ὁποῖος ἀπέθανε τὸ 240 π. Χ. Διὰ τὸν πατέρα του, ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη, ὅτι οὗτος ἦτο ὁ ἀστρονόμος Φειδίας [Ψαμμίτης, σελίς 220, 9. 21... Φειδίᾳ δὲ τοῦ ἀμοῦ Πατρός] ἐκδ. Heiberg 1913]. Εἰς τὸ σωζόμενον ὅμως χειρόγραφον τοῦ Ψαμμίτου διαβάζεται «τοῦ Ἀκούπατρος» πρᾶγμα ποῦ γεννᾷ τὴν ἀμφιβολίαν, ὡς πρὸς τὸν πατέρα τοῦ Ἀρχιμήδους. Πολὺ λογικὸν ὅμως εἶναι τὸ γενικῶς πιστευτόν, ὅτι «τοῦ Ἀκούπατρος» εἶναι κακασυνταγρῆ «τοῦ ἀμοῦ Πατρός». Πολλοὶ ὑποστηρίζουν ὅτι ἦτο συγγενὴς τῆς βασιλικῆς οἰκογενείας τῶν Συρακουσῶν. Βέβαιον εἶναι, ὅτι ἦτο υἱὸς εὐπόρου οἰκογενείας, καὶ τοῦτο συνάγεται ἀπὸ τὰ ταξίδια ποῦ ἔκαμε εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν καὶ τὴν Ἰσπανίαν. Ὁ Πλούταρχος καὶ ὁ Πρόκλος ἀναφέρουν ὅτι ἦτο φίλος τῶν τυράννων τῶν Συρακουσῶν Ἰέρωνος καὶ Γέλωνος. Ἱστορικῶς εἶναι ἀκόμη παραδεκτόν, ὅτι μὲ τὰς μηχανικὰς του ἐφευρέσεις ὑπερήσπισε τὰς Συρακούσας ἐναντίον τῶν πολιορκητῶν τῆς πόλεως κατὰ τὰ δύο τελευταῖα ἔτη τῆς πολιορκίας.

Δὲν εἶναι γνωστὸν ἐπὶ τοῦ παρόντος ἂν ἔγραψε ἐκτεταμένον σύγγραμμα. Ἀπὸ τὰ ἔργα του δὲ πολλὰ ἔχουν χαθῆ. Τὰ πλέον διαδεδομένα μετὰ τὸν θάνατόν του ἔργα εἶναι 1) τὸ περὶ Σφαίρας καὶ κυλίνδρου, 2) ἡ μέτρησις τοῦ κύκλου καὶ 3) τὸ περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν. Διὰ τὸ πρῶτον καὶ τρίτον ἐκ τούτων ἔγραψεν σχόλιον τοῦ Εὐτοκίου, τὸ ὁποῖον σώζεται. Ἀπὸ τὸ ἀραβικὸν χειρόγραφον ἐσώθη τὸ ἔργον του μεταφρασθὲν εἰς τὴν λατινικὴν *liber assumptionis* ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἐπίπεδον Γεωμετρίαν, πολλοὶ δὲ ἀραβικοὶ πηγαὶ κάνουν μνημεῖον ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ ὁποῖα ἔχουν χαθῆ. Ἀλλὰ καὶ Ἕλληνες συγγραφεῖς ἀναφέρουν ἔργα ἀπολεσθέντα τοῦ Ἀρχιμήδους. Τὰ ἔργα αὐτὰ εἶναι τὸ περὶ πολυέδρων ποῦ μνημονεύει ὁ Πάππος, αἱ Ἀρχαὶ εἰς τὰς ὁποίας ὁ Ἀρχιμήδης ἐξηγεῖ εἰς τὸν Ζεῦξιππον τὴν ἀριθμητικὴν γραφὴν, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῖ εἰς τὸν Ψαμμίτην, τὸ περὶ ζυγῶν ποῦ μνημονεύει ὁ Πάππος καὶ ὅπου περιέχεται ἡ περίφημος φράσις «δὸς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γὰν κινήσω. Ἐπίσης τὸ ἔργον περὶ κατοπτρικῶν, τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Θέων εἰς τὴν Σύνταξιν τοῦ Πτολεμαίου, τὸ περὶ σφαιροποιίας καὶ αἱ τῶν ἐνιαυτῶν διαφοραὶ. Τὸ «βοικὸν πρόβλημα» ἢ Ἀρχιμήδειον ὡς τὸ ἀπεκάλεσεν ὁ Κικέρων,

σάζεται γραμμένον εις στίχους Ιωνικής διαλέκτου. Οί κριτικοί τών έργων του 'Αρχιμήδους παραδέχονται τοῦτο ὡς γνήσιον ἔργον ἀπὸ ἀπόψεως περιεχομένου, ὅχι ὁμῶς καὶ ὡς πρωτότυπον, διότι ὁ 'Αρχιμήδης ἔγραψεν εἰς δωρικήν διάλεκτον. Τὸ βοεικὸν πρόβλημα ἀνευρέθη μαζί με σχόλιον ὑπὸ τοῦ Lessing εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς γερμανικῆς καμπούλεως Wolfenbüttel (κειμένης νοτίως τοῦ Braunschweig). Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀπέστειλεν ὁ 'Αρχιμήδης εἰς τὸν ἐν 'Αλεξανδρείᾳ μαθηματικὸν Ἐρατοσθένην. Μνεῖα τοῦ προβλήματος γίνεται καὶ εἰς Σχόλια τοῦ Χαρμίδου τοῦ Πλάτωνος «θεωρεῖ οὖν τοῦτο μὲν τὸ κληθὲν ὑπ' 'Αρχιμήδους βοεικὸν πρόβλημα...» Τὸ πρόβλημα εἶναι παίγνιον ἐξ ἐκείνων τὰ ὅποια συνήθιζε κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ 'Αρχιμήδης νὰ στέλλῃ εἰς διαφόρους μαθηματικούς.

Ἐνα ἀπὸ τὰ ὡς χαμένα θεωρούμενα ἔργα τοῦ 'Αρχιμήδους ἀνευρέθη τὸ 1906. Τὸ ἔργον αὐτό, «Ἡ Ἐφοδος», εἶναι τὸ σπουδαιότερον τοῦ 'Αρχιμήδους. Δυστυχῶς δὲν ἐσώθη ὁλόκληρον. Τὸ ἔργον ἀνευρέθη ἀπὸ τὸν Δανὸν Heiberg εἰς τὸ Μετόχι Μοναστηρίου τοῦ Παναγίου Τάφου ἐν Κων(σταν)πόλει. Τὸ ἀνευρεθὲν χειρόγραφον βιβλίον περιέχει ἓνα εὐχολόγιον γραμμένο τὸν 13ον αἰῶνα. Ὁ γραφεὺς τοῦ εὐχολογίου ἐχρησιμοποίησε ἓνα χειρόγραφον βιβλίον τὸ ὁποῖον ἔγραψεν τὸν 10ον αἰῶνα ὅπου ἦσαν γραμμένα τὰ ἔργα τοῦ 'Αρχιμήδους. Δὲν ἔσβυσε τελείως τὸ κείμενον τῶν ἔργων τοῦ 'Αρχιμήδους καὶ ἐπάνω εἰς τὸ ἀτελὲς καθαρισθὲν χαρτὶ ἔγραψε τὸ εὐχολόγιον. Τὸ εὐρεθὲν χειρόγραφον περιέχει μέρη μέρος «περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου» σχεδὸν ὁλόκληρον τὸ περὶ «ἐλλίκων» μέρη ἀπὸ τὸ «κύκλου μέτρησης καὶ ἰσορροπικά», μέρη «περὶ ὀχουμένων» ἀρκετὸν μέρος «τῆς ἐφόδου» καὶ μέρος τοῦ «στομαχίου». Ἡ Ἐφοδος ἢ ὅπως ὁ ἀρχικός του τίτλος «'Αρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην Ἐφοδος» παριστᾷ τὴν μαθηματικὴν μέθοδον ἐρεῦνης τοῦ 'Αρχιμήδους καὶ εἶναι τὸ σπουδαιότατον ἔργον του.

Ἡ ἀνεύρεσις τοῦ ἔργου αὐτοῦ τοῦ 'Αρχιμήδους εἰς ἓνα εὐχολόγιον, καθιστᾷ πολὺ πιθανὴν τὴν γνώμην ὅτι μία ἐντατικωτέρα ἐρευνα τῶν διαφόρων εὐχολογίων τῶν Μοναστηρίων δὲν ἀποκλείεται νὰ φέρῃ εἰς φῶς καὶ ἄλλα ἔργα του θεωρούμενα ὡς χαμένα.

Ἡ ἐπίδρασις τῶν ἔργων τοῦ 'Αρχιμήδους εἰς τὴν σύγχρονον ἐξέλιξιν τῆς ἐπιστήμης ἦτο μεγάλη. Θεωρεῖται βέβαιον ὅτι ὁ Γαλιλαῖος εἶχε χειρόγραφα τῶν ἔργων τοῦ 'Αρχιμήδους καὶ ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν αὐτῶν ἐφεύρε τοὺς νόμους τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων. Ἡ πρώτη ἀνατύπωσις τῶν ἔργων τοῦ ἔγινε τὸ 1544 εἰς τὴν Βασιλείαν.

Ὁ 'Αρχιμήδης ἔγραψε εἰς τὴν δωρικήν διάλεκτον. Τὰ σωζόμενα ἔργα του εἶναι:

1) Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I, II. 2) Τετραγωνισμὸς τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (παραβολῆς). 3) Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. 4) Κύκλου μέτρησης. 5) Περὶ ἐλλίκων. 6) Περὶ κωνοειδῶν καὶ σφαιροειδῶν. 7) Ψαμμίτης. 8) Περὶ ὀχουμένων. 9) Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην Ἐφοδος. 10) Στομάχιον. 11) Πρόβλημα βοεικόν. 12) Liber assumptionum. 13) Ἀποσπάσματα διαφόρων ἔργων.

Ὁ 'Αρχιμήδης ἐθεώρει ἀπὸ τὰ ἔργα του, ὡς σπουδαιότερον, τὸ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Καὶ τοῦτο ὅχι ἀνευ λόγου. Μέχρι τῆς ἐποχῆς του, ὅλος ὁ τότε πολιτισμένος κόσμος ἐπερίμενε ἀνυπομόνως τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν, τὰ ὅποια διὰ τὸν κάθε ἄνθρωπον εἶναι ἀντικείμενα παρατηρήσεως καὶ χρήσεως συνήθους. Ἡ παραβολή, ἡ ἑλιξ κλπ. ἐνδιαφέρουν

μόνον τούς μαθηματικούς. Είναι πιστευτόν λοιπόν δι παρήγγειλε διά τῆς διαθήκης του νά χαράξουν εἰς τὴν πλάκα τοῦ τάφου του μίαν σφαῖραν περιβαλλομένην ἀπὸ κύλινδρον, ἀπὸ τὴν ὁποῖαν ὁ Κικέρων ἀνεκάλυψε τὸν τάφον τοῦ Ἀρχιμήδους.

Εἰς τὸ βιβλίον του ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I καὶ II ἡ μηχανικὰ πραγματεύεται περὶ τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου, τραπεζίου, καὶ παραβολικῶν τμημάτων ὡς καὶ περὶ ἰσορροπίας τῶν μοχλῶν.

Τὸ βιβλίον περὶ παραβολῆς περιέχει ἐν πρώτοις προσφώνησιν πρὸς Δοσίθεον, ἀπὸ τὴν ὁποῖαν ἐξάγεται: ὅτι τοῦτο ἐγράφη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος, ὅτι ὁ Κόνων ἀσφαλῶς δὲν ἦτο ὁ διδάσκαλος τοῦ Ἀρχιμήδους, διότι τὸν προσφωνεῖ ὡς φίλον καὶ ὅτι ὁ Δοσίθεος ἦτο γνῶριμος τοῦ Κόνωνος. Πάρα κάτω ἀνακρίνωνει ὅτι εὑρε κατὰ πρῶτον τὸν τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς μηχανικῶς καὶ κατόπιν γεωμετρικῶς τῇ βοηθείᾳ τοῦ πέμπτου αἰτήματος τοῦ μνημονευομένου εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Ἀκολουθοῦν τρία θεωρήματα ληφθέντα ἀπὸ «τὰ στοιχεῖα τῶν Κωνικῶν τομῶν» χωρὶς νά τ' ἀποδεικνύῃ ἐκ νέου, τέταρτον νέον θεώρημα τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει καὶ κατόπιν ἀπὸ τὰ θεωρήματα 5—16 διὰ τῆς θεωρίας περὶ ἰσορροπίας ἐπιφανειῶν ἐξάγει τὸ θεώρημα 17 περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$ τριγώνου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸ παραβολικὸν τμήμα. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὰς παραγράφους ιη' — κδ' γεωμετρικῶς τῇ βοηθείᾳ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων.

Τοῦ ἔργου περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου προηγείται ἀφιέρωσις πρὸς τὸν Δοσίθεον. Εἰς αὐτὴν ὑπενθυμίζει τὸν τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς καὶ ἐξάγει ὡς νέα θεωρήματα: 1) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι τὸ τετρηπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας. 2) Ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια τμήματος τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφανείαν κύκλου τοῦ ὁποῖου ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος. 3) Ὁ κύλινδρος μὲ βάσιν μεγίστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας εἶναι τὰ $\frac{8}{3}$ τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἐπίσης τὰ $\frac{8}{3}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Προτάσσονται 6 ὁρισμοὶ περὶ καμπύλων καὶ κυρτῶν ἐπιφανειῶν. Ἀκολουθοῦν αἰτήματα, τὰ σπουδαιότερα τῶν ὁποίων εἶναι: 1) Μεταξὺ δύο σημείων ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπόστασις. 2) Ἐάν ληφθοῦν δύο σημεῖα ἐπὶ εὐθείας καὶ ἀχθοῦν διὰ τούτων δύο γραμμαὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, ἡ περικλείουσα γραμμὴ εἶναι μεγαλύτερα τῆς περικλειομένης. 3) Ἐπεκτείνει τὸν τέταρτον ὁρισμὸν τοῦ πέμπτου βιβλίου τοῦ Εὐκλείδους εἰς τὸ αἶτημα, ὅτι ἡ διαφορά δύο ἀνίσων μεγεθῶν, γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν ἢ σωμάτων εἶναι τοιαύτη, ὥστε διὰ συνεχοῦς ἐπαναλήψεως δύναιται αὕτη νά ὑπερβῇ κάθε ὅμιον μέγεθος (Νεώτεροι ἔρευναι ἀπέδειξαν ὅτι τὸ περίφημον τοῦτο αἶτημα εἶναι τοῦ Εὐδόξου).

Εἰς τὰ ἐπόμενα θεωρήματα πραγματεύεται ἐν πρώτοις τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν εἰς κύκλον περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου πολυγώνων, κατόπιν τὴν σχέσιν τοῦ κώνου πρὸς τὴν περιγεγραμμένην ἢ ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸν πυραμίδα καὶ ἀκολουθοῦν παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου καὶ τοῦ ὄγκου των. Μετὰ βραχείαν ἐπισκόπησιν τοῦ διπλοῦ κώνου προετοιμάζει διὰ σειρᾶς θεωρημάτων περὶ ἐπιφανειῶν στερεῶν ἐκ περιστροφῆς τὴν ἀπόδειξιν τῶν νέων του εὐρημάτων, ὁπότε ἀναφαί-

νεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὡς ὄριον ἢ ἄθροισμα κωνικῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς κῶνον τοῦ ὁποῦ ἡ βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας. Τὸ πρῶτον βιβλίον περὶ σφαίρας τελειώνει μὲ θεωρήματα στερεῶν ἐκ περιστροφῆς τομέων μὲ περιγεγραμμένα καὶ ἔγγεγραμμένα πολύγωνα. Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον πραγματεύεται τὸ πρόβλημα: δοθέντος κῶνου ἢ κυλίνδρου νὰ εὑρεθῇ ἰσοδύναμος σφαῖρα καὶ κατόπιν τὸ πρόβλημα: νὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου σφαῖρα οὕτως, ὥστε τὰ δύο σφαιρικά τμήματα νὰ ἔχουν δοθεῖσαν σχέσιν. Ἀκολουθοῦν θεωρήματα περὶ ὄγκου τομέων καὶ τῆς σχέσεώς τῶν πρὸς τὴν σφαῖραν. Τέλος εἰς τὸ ἕνατον θεωρήμα τοῦ β' βιβλίου περὶ σφαίρας ἀποδεικνύει, ὅτι ἐξ ὄλων τῶν σφαιρικῶν τομέων οἱ ὅποιοι ἔχουν τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, μέγιστος εἶναι τὸ ἡμισφαίριον.

Εἰς τὸ βιβλίον περὶ τῆς μετρήσεως τοῦ κύκλου ἀποδεικνύονται: 1) Ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποῦ ἡ βάσις ἰσοῦται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ἀκτίνα, τῇ βοηθεῖα περιγεγραμμένων καὶ ἔγγεγραμμένων πολυγώνων. — 2) Ἡ σχέσις τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποῦ πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ $11:14$ ἢ ἡ σχέσις τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος μὲ $22:7$. — 3) Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι μικρότερα τοῦ $3\frac{10}{70}$ τῆς διαμέτρου καὶ μεγαλύτερα τοῦ $3\frac{10}{71}$. Τὴν εὐρεσιν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν εὕρσκει πάντοτε διὰ σχηματισμοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου ὁρίου τῶν πολυγωνικῶν περιμέτρων. Τὰς τετραγωνικὰς ρίζας ποῦ προκύπτουν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς αὐτοὺς ἀντικαθιστᾷ μὲ σχέσεις ἀριθμητικὰς (ἀναλογίας) καὶ εἶναι πιθανώτατον, ὅτι τὰς οὕτω εὕρισκομένας τιμὰς εὔρε χρησιμοποιῶν εἶδος συνεχῶν κλασμάτων, διότι αὗται σχεδὸν συμπίπτουν μὲ τὰ ἐξαγόμενα ποῦ λαμβάνομεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἀνάγράφει τὴν μέθοδον ποῦ ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν τιμῶν αὐτῶν.

Τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου ἀκολουθεῖ τὸ βιβλίον περὶ ἐλλίκων. Εἰς τὴν προσφώνησιν πρὸς τὸν Δοσίθεον ἀναφέρεται ὁ Ἡρακλείδης, ὡς ὁ μεταφέρων χειρόγραφα πρὸς τὸν Δοσίθεον. Ἴσως ὁ Ἡρακλείδης νὰ εἶναι ὁ συγγραφεὺς τῆς βιογραφίας τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία ἔχει χαθῇ. Ὁ Ἀρχιμήδης λέγει ὅτι ἀνέλαβε τὴν ἔρευναν τῆς ἑλικὸς πολλὰ ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος. Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐπικαλεῖται δι' ἑαυτὸν καὶ πατρότητα τῶν νέων εὕρημάτων περὶ ἑλικὸς, ὅχι ὅμως καὶ τῆς εὐρέσεως τῆς ἑλικὸς, ἡ ὁποία πρέπει ν' ἀποδοθῇ εἰς τὸν Κόνωνα. Διότι ὁ Ἀρχιμήδης ἐπερίμενε πολλὰ ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος μήπως ἀνακοινωθῇ ὑπὸ τῶν φίλων τοῦ Κόνωνος σχετικόν τι περὶ τῆς ἑλικὸς. Ὅταν ὅμως ἐπαίσθη ὅτι δὲν ὑπῆρχε τίποτε τότε ἐπροχώρησε εἰς τὴν ἔρευναν. Συνεπῶς τὸ ἀναφερόμενον ὑπὸ τοῦ Πάππου, ὅτι ὁ Κόνων εἶναι ἐφευρέτης τῆς ἑλικὸς φαίνεται ἀληθές. Κατόπιν ὁ Ἀρχιμήδης ἀπαριθμεῖ τὰ θεωρήματα ποῦ ἔστειλε μὲ τὸν Ἡρακλείδην καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀποδειχθῇ εἰς τὸ βιβλίον περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Ὁ ὀρισμὸς τῆς ἑλικὸς εἶναι: ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ περιστρέφεται ὁμαλῶς περὶ τὸ ἐν ἄκρῳ τῆς μέχρις ὅτου γράφῃ ὁλόκληρον περιφέρειαν καὶ συγχρόνως ἔν σημείον ἀρχόμενον ἀπὸ τὸ ἄκρον τοῦτο κινεῖται ὁμαλῶς μέχρι τοῦ ἄλλου ἄκρου τῆς εὐθείας, ἡ γραμμὴ ποῦ γράφει εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας κινούμενον σημεῖον λέγεται ἑλιξ.

Σκοπός τῆς ἐρεῦνης τῆς ἑλικος εἶναι τὸ εἰς τὸ θεώρημα 24 ἀναφερόμενον, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποῦ περικλείεται ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν γραμμὴν καὶ τὴν ἑλικὰ, ὅταν ἡ ἀρχικὴ γραμμὴ κἀνῃ ὁλόκληρον περιστροφὴν, ἴσούται πρὸς τὸ ἐν τρίτον τοῦ κύκλου, ὃ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν (περιτρεφόμενην) εὐθεῖαν. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου θεωροῦνται κατ' ἀρχὰς αἱ κινήσεις σημείου ἢ σημείων ἐπὶ εὐθείας, ὥς καὶ αἱ σχέσεις μεταξὺ χορδῶν καὶ τόξων. Ἀκολουθεῖ σειρὰ ὁρισμῶν οἱ ὁποῖοι ἔχουν σχέσιν μὲ τὴν γένεσιν τῆς ἑλικος.

Ἐπίσης θεωρήματα περὶ ἀκτινοειδῶν ἀνυσμάτων (πολικῶν ἀξόνων) καὶ ἐφαπτομένων τῆς ἑλικος καὶ ἡ σχέσις τοῦ ἀκτινοειδοῦς ἀνύσματος τῆς ἑλικος πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ὃ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν γενετείραν εὐθεῖαν τῆς ἑλικος. Κατόπιν δεικνύεται ὅτι ἡμπορεῖ νὰ περιγραφῇ καὶ ἐγγραφῇ εἰς τὴν ἑλικὰ σχῆμα ἀπὸ πολλὰ κυκλικά τόξα καὶ οὕτω ἐπιτυγχάνεται ἡ μέτρησις τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ σχηματιζομένου κατόπιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων περιστροφῶν τῆς γενετείρας γραμμῆς. Τέλος ἀκολουθεῖ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς σχέσεως ἑλικοειδῶν τομέων πρὸς κυκλικοὺς τομεῖς. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τούτων ἐπιτυγχάνεται διὰ ἀθροίσεως ἐλαχίστων ἐπιφανειῶν τομέων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2} \rho^2 \theta$ ὅπου ρ ὁ πολικὸς ἀξὼν καὶ θ ἡ γωνία τοῦ τομέως. Ὁ Ἀρχιμήδης ἐφαρμόζει ἐδῶ στοιχειώδη μέθοδον ὑπολογισμοῦ ἐμβαδοῦ ἐπιφανείας δι' ὁλοκληρώσεως.

Οὐχὶ μικροτέρας σημασίας εἶναι τὸ βιβλίον του περὶ κωνοειδῶν καὶ σφαιροειδῶν. Εἰς τὴν ἀφιέρωσιν πρὸς τὸν Δοσίθεον κάνει μακρὰν εἰσαγωγὴν. Λέγει ὅτι συνήντησε μεγάλας δυσκολίας διὰ νὰ λύσῃ τὰ προβλήματα τοῦ βιβλίου τούτου καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἐβράδυνε πολὺ εἰς τὴν δημοσίευσίν του. Κωνοειδῇ ὀνομάζει τὰ στερεὰ τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ περιστροφὴν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς περὶ τὸν ἀξονά των. Σφαιροειδῇ δὲ τὰ προκύπτοντα ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὸν μέγαν ἢ μικρὸν αὐτῆς ἀξονα. Κατ' ἀρχὰς ἀναφέρει θεωρήματα περὶ συνεχῶν ἀναλογιῶν, περὶ ἀναλογιῶν ἐπιφανειῶν καὶ περὶ ἀναλογιῶν παραβολικῶν τομέων, τὰ ὁποῖα συναντῶμεν ἤδη εἰς τὸν Εὐκλείδην. Τὰ θεωρήματα 4—7 ἀναφέρονται εἰς τὴν κῶνον καὶ ἔχουν ἐν μέρει ἀποδεικτῇ ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην.

Τὰ θεωρήματα 8—10 εἶναι νέα καὶ δείχνουν ὅτι εἰς κάθε ἑλλειψιν ἡμπορεῖ νὰ εὑρεθοῦν πολλοὶ κῶνοι ἢ κύλινδροι, οὕτως, ὥστε ἡ ἑλλειψις φαίνεται ὡς τομὴ κυλίνδρου ἢ κῶνου. Ἀκολουθοῦν θεωρήματα περὶ τομῶν καὶ ἐφαπτομένων εἰς τὰ κωνοειδῇ καὶ σφαιροειδῇ τὰ ὁποῖα τελειώνουν εἰς τὸ θεώρημα: νὰ τμηθῇ ἑλλειψοειδὲς εἰς δύο ἴσα μέρη δι' ἐπιπέδου οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸν ἀξονα. Μετὰ ταῦτα ἀρχίζει τὸ κύριον μέρος τοῦ ἔργου, τὴν μέτρησιν τῶν ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδῶν, ὑπερβολοειδῶν καὶ ἐλλειψοειδῶν. Ἡ μέθοδος ποῦ ἀκολουθεῖ εἶναι παντοῦ ἡ αὐτή. Ἀποτέμναι μὲ ἐπίπεδά κατ' ἴσας ἀποστάσεις τὰ στερεὰ, εἰς μικρὰ τμήματα. Εἰς τὰ τμήματά ταῦτα περιγράφει καὶ ἐγγράφει κυλίνδρους. Δι' ἀθροίσεως τῶν περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων κλείνει τὰ ἐκ περιστροφῆς στερεὰ: εἰς δύο ὅρια, τὰ ὁποῖα δι' αὐξήσεως τῶν ἐπιπέδων τομῆς, δύνανται νὰ πλησιάσουν πρὸς ἀλλήλα, ὅσον θέλομεν. Ἡ ἄθροισις αὐτῇ ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὑρεσιν τῆς ἐφόδου.

Ὁ Ψαμμίτης ἐγράφει μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ καταστήσῃ κατανοητὸν εἰς τὸν βασιλέα Γέλωνα ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειρον. Ὑποθέτει ὅτι σφαῖρα μὲ κέντρον τὴν Γῆν καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν μέχρι τῶν ἀπλανῶν

είναι γεμάτη από κόκκους άμμου. Υπάρχει αριθμός όστις πάντοτε είναι μεγαλύτερος από τόν αριθμόν τών κόκκων τής άμμου. Διά τόν ύπολογισμόν αυτόν χρησιμοποιεί ό 'Αρχιμήδης αριθμητικές έκφράσεις, τās όποίās έχει σχηματίσει εις τό βιβλίον του 'Αρχαί.

Αί 'Αρχαί έχουν χαθῆ. Εις τόν Ψαμμίτην όμως (3ον Κεφάλαιον) αναφέρεται περιληπτικώς τό αριθμητικόν σύστημα πού χρησιμοποιεί ό 'Αρχιμήδης εις τούς ύπολογισμούς του βιβλίου τούτου. Οι αριθμοί από ένα έως μύρια' μυριάδες είναι κοινῆς χρήσεως. Διά νά αριθμήση πέραν αὐτῶν, ονομάζει τούτους τούς «πρώτους» αριθμούς ἢ ὅπως θά ἤμπορούσαμε νά ποῦμε σήμερα τήν πρώτην σειράν αριθμῶν, ἥτοι μέχρι τοῦ 10^8 . Τόν τελευταῖον αριθμόν τῆς σειράς αὐτῆς λαμβάνει ὡς μονάδα διά τόν σχηματισμόν τῶν δευτέρων αριθμῶν οὕτως ὥστε ἡ δευτέρα αὐτῇ σειρά ἀριθμῶν νά περιλαμβάνῃ τούς ἀριθμούς ἀπό 10^8 — 10^{16} κατὰ τό σημερινόν σύστημα μετρήσεως. Κατά τόν ἴδιον τρόπον σχηματίζει τήν τρίτην σειράν καί οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς σειράς «μυριάκις μυριοστών ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας» ἥτοι μέχρι τῆς 10^8 σειράς, δηλ. μέχρι $(10^8)^{10^8}$. Κατόπιν λαμβάνει τόν ἀριθμόν τοῦτον ὡς μονάδα ονομάζων αὐτόν πρώτην περίοδον καί σχηματίζει τόν δεύτερον ἀριθμόν τῆς περιόδου αὐτῆς ἥτοι $[(10^8)^{10^8}]^2$ καί οὕτω καθεξῆς. Τό σύστημα αὐτό ἀριθμῆσεως εἶναι ἀπεριόριστον. Σημαντικῆς σπουδαιότητος εἶναι αἱ παρατηρήσεις ἀπό τῆς 5—8 παραγράφου. Εἰς αὐτάς φανερώνει πῶς οἱ ἀριθμοί ἀφ᾽ ἑαυτοῦ ἐν συνεχείᾳ ἀναλογίκα καί πῶς αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀριθμῶν διατηροῦνται ἀνάλογοι.

Μετά τήν παρένθεσιν αὐτήν ἀπό τās 'Αρχάς, εις τās όποίās προφανῶς θά ἐκτίθεται λεπτομερέστερον ό τρόπος τῶν ύπολογισμῶν, ύπολογίζει τόν ἀριθμόν τῶν κόκκων τῆς άμμου τούς όποίους θά περιέχῃ σφαῖρα τήν όποίαν θά παρίστανε ἡ θεωρία περί τοῦ Σόμπαντος, τοῦ 'Αριστάρχου, όστις ἀριθμός μᾶς παρέχει μίαν εἰκόνα τοῦ ἀπείρως μεγάλου. Μνημονεύει ῥητῶς ὅτι ό μέγας εὐρεθείς ἀριθμός δέν εἶναι ἀπείρως μέγας. 'Ο 'Αρχιμήδης αἰσθάνεται τήν ἀνάγκη νά καταστήσῃ εις τούς ἀνθρώπους γνωστήν τήν διαφοράν πού ὑπάρχει μεταξύ τοῦ πολυ μεγάλου καί τοῦ ἀπείρως μεγάλου.

Ἀναφέρει τήν μέτρησιν τῆς Γῆς ὑπό τοῦ Ἐρατοσθένους, χωρίς νά μνημονεύῃ τό ὄνομά του καί ὅτι ό Εὐδοξος ὑπαλόγισε τήν φαινόμενην διάμετρον τοῦ Ἥλιου ὡς ἐννεαπλασίαν τῆς διαμέτρου τῆς Σελήνης, ἐν ᾧ ό Φαιδίας τήν ἀνεῦρε δωδεκαπλασίαν καί ό 'Αριστάρχος μεταξύ 18—20πλασίας. 'Ο ὑπολογισμός τοῦ 'Αριστάρχου ὡδήγησέ πρὸς τήν ἐκδοχήν ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ Ἥλιου εἶναι 1 : 180 τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου. 'Ο 'Αρχιμήδης ἀναφέρει ἐδῶ, ὅτι ό 'Αριστάρχος ό ἴδιος ὑπαλόγισε τήν διάμετρον τοῦ Ἥλιου ὡς τό 1 : 720 τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου. 'Ο ἴδιος δέ ὑπολογίζει τήν διάμετρον ὡς τό 1 : 812.

Τό χειρόγραφον τῆς ἐφόδου, ὅπως ἀναφέρομεν παραπάνω, εὐρέθῃ εις τό Μετόχι τοῦ Παναγίου Τάφου εις τήν Κων)πολιν. Δυστυχῶς δέν εἶναι πλήρες. Τό τέλος λείπει καί μερικά φύλλα εἶναι τόσο καλᾶ καθαρισμένα ἀπό τόν γραφέα τοῦ εὐχολογίου, κατὰ τόν 13ον αἰῶνα, ὥστε ἀπό τό καίμενον τοῦ ἔργου, τοῦ 10 αἰῶνος, δέν διαβάζεται τίποτε. 'Ο Heiberg ἔχει κατὰ τό ὄνα τόν συμπληρώσει μερικά κενά.

Τό βιβλίον εἶναι ἀφιερωμένον ἀπό τόν 'Αρχιμήδην εις τόν Ἐρατοσθένην. 'Ὡς νέα θεωρήματα τοῦ βιβλίου τούτου εἶναι: 1) 'Εάν εις ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐγγραφῇ κύλινδρος καί ἀχθῇ ἐπίπεδον διά μιᾶς ἐκ τῶν ἄνω ἁκμῶν τοῦ παραλληλεπίδου καί τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τότε τό ἐπίπεδον

τοῦτο τέμνεται ἀπὸ τὸν κύλινδρον τμήμα ἴσον πρὸς τὸ ἕκτον μέρος τοῦ παραλληλεπίδου. 2) Ἐάν εἰς κύβον ἐγγραφοῦν δύο κύλινδροι (ὁ ἕνας π. χ. μὲ κέντρον, ὁ ἄλλος μὲ ὀριζόντιον ἀξονα) ὁ χῶρος τοῦ περικλείεται ὑπὸ τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κύβου. Ὁ Ἀρχιμήδης θεωρεῖ ὡς σπουδαία τὰ θεωρήματα αὐτά, διότι διὰ πρώτην φοράν εὐρίσκεται χῶρος περικλειόμενος ὑπὸ κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἴσος πρὸς χῶρον περικλειόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων. Τὸ σπουδαῖον ὅμως εἰς τὰ θεωρήματα αὐτά εἶναι ἡ μέθοδος τοῦ ἐφήρμοσε διὰ τὰ ἀποδείξῃ. Ἀνεχώρησε οὐχὶ ἀπὸ γεωμετρικᾶς θεωρίας ἀλλὰ ἀπὸ καθαρῶς μηχανικᾶς χρησιμοποιήσας τὰς θεωρίας περὶ κέντρου βάρους. Ὅταν ἐπέσθῃ, ὅτι διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς τὰ θεωρήματα αὐτά ἦσαν ὀρθά, τότε ἐπέτυχε τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν.

Καὶ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀνεγνωρίσθησαν θεωρήματα ὡς ὀρθὰ χωρὶς ὅμως ν' ἀποδειχθοῦν, ὅπως π. χ. τὰ θεωρήματα τοῦ ἀπέδειξεν κατόπιν γεωμετρικῶς ὁ Εὐδόξος ἥτοι 1) ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος 2) ὁ κῶνος εἶναι $\frac{1}{3}$ τοῦ κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὰ θεωρήματα αὐτὰ εἶχε διατυπώσει προηγουμένως ὡς ὀρθὰ χωρὶς νὰ τ' ἀποδείξῃ ὁ Δημόκριτος. Δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶχαν ἀποδείξῃ τὰ θεωρήματα αὐτά ὁ Δημόκριτος διὰ ζυγίσεως ἢ μηχανικῶς.

Ἐπίσης ὑποστηρίζεται ὅτι εἶναι πολὺ πιθανὸν νὰ εἶχαν ὁ Δημόκριτος ἐφαρμόσῃ παρομοίαν σχεδὸν πρὸς τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὴν ἀποδείξῃ τῶν θεωρημάτων αὐτῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως εἰς τὸ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀναφέρει ὅτι οὐδεὶς πρὸ τοῦ Εὐδόξου εἶχαν ἀποδείξει γεωμετρικῶς τὰ θεωρήματα αὐτά. Ὅπως δὴποτε τίποτε δὲν διασώζεται πού ν' ἀποδεικνύῃ ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶχαν ἐφαρμόσῃ μεθόδους ὁλοκληρώσεως, πλὴν τοῦ χωρίου τοῦ Πλουτάρχου, ὅπου ἀναφέρεται ὅτι «ὁ Δημόκριτος εὐρίσκετο ἐν ἀμφιβολίᾳ, ἂν αἱ παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν κῶνου ἀποκοπτόμεναι ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι ἢ οὐ. κλπ.»

Ἡ μέθοδος τὴν ὁποῖαν θέλει νὰ δείξῃ ὁ Ἀρχιμήδης εἶναι μηχανικὴ ὅπως ὁ ἴδιος τὴν ὀνομάζει. Χρησιμοποιεῖ κατ' ἀρχὰς ὀκτὼ θεωρήματα περὶ κέντρου βάρους τὰ ὁποῖα διατυποῦνται εἰς τὸ βιβλίον του «στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν» ἢ «ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν». Ὡς πρῶτον θεωρῆμα ἀποδεικνύει κατὰ τὴν νέαν μέθοδον, τὸ εἰς τὸν τετραγωνισμόν τῆς παραβολῆς ἀναφερόμενον, ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν παραβολὴν καὶ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Μὲ τὴν αὐτὴν μέθοδον θεωρεῖ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ὅτι εἶναι τετραπλάσιος τοῦ κῶνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα ἢ ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον εἶναι 2 : 3. Ἀκολουθεῖ ἡ θεωρία περὶ ἑλλειψοειδοῦς καὶ παραβολοειδοῦς, ἡ ἔρευνα τοῦ κέντρου βάρους τοῦ παραβολοειδοῦς τομέως καὶ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἡμισφαίριου τὸ ὅποιον εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας τέμνεται εἰς λόγον 5 : 3. Τρία ἐπόμενα θεωρήματα ἀφοροῦν σφαιρικόν τομέα. Ὡς δωδέκατον θεωρῆμα ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον ἐκ τῶν δύο νέων θεωρημάτων τὰ ὁποῖα μνημονεύει εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς «Ἐφόδου» καὶ τοῦτο δὲν σώζεται πλήρως. Τὸ δεῦτερον νέον θεωρῆμα λαίπει ἀπὸ τὸ χειρόγραφον τελείως. Ἀπὸ τὸ σωζόμενον χειρόγραφον τῆς ἐφόδου καὶ ἰδίως ἀπὸ τὸ ιε' θεωρῆμα φαίνεται πόσον καλὰ ὁ Ἀρχιμήδης κατέχει τὴν ἔννοιαν τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ δικαίως πρέπει νὰ θεωρῇται ὁ ἐφευρέτης τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Ἀρχιμήδης Δοσιθέω εὖ πράττειν.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἅμιν ἐν φιλίᾳ, τὴν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἔλυπθήμετες ὥς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριζάμεθα δὲ ἀποστέλλαι τοὶ γράψαντες, ὥς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες. ἡμεῖς, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν θεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἡμῶν θεωρεῖται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὗρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχειρησάν τινες γράφειν ὥς δυνατόν ἐδὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμᾶματι τῷ δοθέντι χωρίον εὗρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ὁλοῦ τοῦ κώνου τομαῖς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐκ εὕρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθην, τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς τμᾶμα περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἡμῶν εὗρηται· δείκνυται γάρ, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντός τὰν αὐτὰν καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμᾶματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ἥ ὑπερέχει τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατόν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτῇ συντιθεμένην παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου· κέχρηται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τοὺς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τὰν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρωμένοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τὰν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κώνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λήμματι τι λαμβάνοντες ἔγραφον. συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἥσσαν τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις ἀποστέλλομες πρῶτον μὲν, ὥς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καί, ὥς διὰ τῶν γεωμετρούμενων ἀποδείκνυται, προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰς ἀποδείξεις. ἔρρωσο.

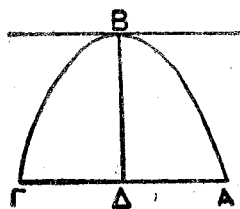
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Ἀρχιμήδης Λοσιθέω εὖ πράττειν.

Ἐπειδὴ ἄκουσα ὅτι ὁ μὲν Κόνων ἀπέθανε, ὁ ὅποιος εἶχε πάντοτε ἐπιδείξει τὴν ἐγκάρδιον φιλίαν τοῦ σέ μένα, σὺ δὲ ἕνας πεπειραμένος γεωμέτρης ἦσουν φίλος τοῦ Κόνωνος, ἐλυπήθηκα διὰ τὸν ἀποθανόντα καὶ ὥς φίλον καὶ ὥς θαυμάσιον μαθηματικὸν καὶ ἀπεφάσισα ν' ἀποστείλω σέ σένα τὴν ἔρευναν ἐπὶ ἑνὸς προβλήματος, τὴν ὁποίαν ἀρχικῶς ἐσκόπευα ν' ἀποστείλω εἰς τὸν Κόνωνα, ἑνὸς δηλαδὴ προβλήματος μὲ τὸ ὁποῖον οὐδεὶς προηγουμένως εἶχεν ἀσχοληθῇ, τώρα δὲ ἀσχολοῦμαι ἐγώ, καὶ τὸ ὁποῖον ἔλυσα κατ' ἀρχὰς μὲν διὰ μεθόδων τῆς μηχανικῆς, κατόπιν δὲ διὰ γεωμετρικῶν μεθόδων.

Ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι πρότερον ἡσχολήθησαν μὲ τὴν γεωμετρίαν, ἐπεχείρησαν μερικοὶ ν' ἀποδείξουν, ὅτι ἦτο δυνατόν νὰ κατασκευασθῇ ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς, ἡ ὁποία θὰ ἦτο ἴση κατὰ τὸ ἐμβαδὸν πρὸς δοθέντα κύκλον ἢ δοθὲν κυκλικὸν τμήμα, κατόπιν δὲ ἐπεχείρησαν ν' ἀποδείξουν τὸ ἴδιο δι' ἑν τμήμα ἐλλείψεως, χρησιμοποιοῦντες θεωρήματα τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια δὲν ἦτο ἀποδεδειγμένη, συνεπεία τοῦ ὁποίου, οἱ περισσότεροι ἀνεγνώρισαν, ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν ἤμποροῦσαν νὰ λυθοῦν. δὲν ἄκουσα ὅμως ὅτι ἠμπόρεσε κανεὶς μαθηματικὸς μέχρι σήμερον νὰ τετραγωνίσῃ τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς παραβολικοῦ τμήματος, ὅπως τοῦτο τώρα ἐπέτυχα ἐγώ. διότι ἀποδεικνύω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραβολικοῦ τμήματος εἶναι μεγαλύτερον κατὰ τὸ ἑν τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμήμα καὶ ἐχρησιμοποίησα πρὸς τοῦτο τὸ ἐπόμενον λήμμα· ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ εὐρίσκεται ἕνα πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς δύο δοθέντων ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μεγαλύτερον οἷαςδὴ ποτε δοθείσης ἐπιφανείας.

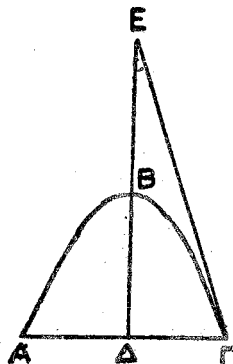
Χρησιμοποιοῦν δὲ καὶ οἱ προηγούμενοι γεωμέτραι τὸ λήμμα τοῦτο· διότι οὗτοι μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ λήμματος τούτου ἀπέδειξαν, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ἀκτίνων των, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἑν τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ τὴν πυραμίδα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἑν τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸν κώνον.



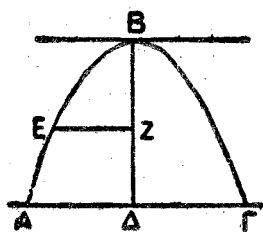
Εἴ καὶ ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, ἐφ' ἧς ἡ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ $ΒΔ$ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἡ δὲ $ΑΓ$ παρὰ τὰν κατὰ τὸ $Β$ ἐπιψαύουσαν τῆς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα ἔσσειται ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΔΓ$. καὶ ἴσα ἢ ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΔΓ$, παραλλήλοι ἔσσουνται αἱ τε $ΑΓ$ καὶ ἡ κατὰ τὸ $Β$ ἐπιψαύουσα τῆς τοῦ κώνου τομᾶς.

β'.

Εἴ καὶ ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἡ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ ἡ $ΒΔ$ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἡ δὲ $ΑΔΓ$ παρὰ τὰν κατὰ τὸ $Β$ ἐπιψαύουσαν τῆς τοῦ κώνου τομᾶς, ἡ δὲ $ΕΓ$ τῆς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ $Γ$, ἔσσουνται αἱ $ΒΔ$, $ΒΕ$ ἴσαι.



γ'.

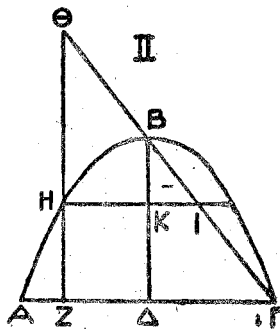
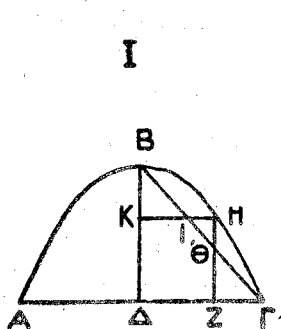


Εἴ καὶ ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἡ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ $ΒΔ$ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέντι τινες αἱ $ΑΔ$, $ΕΖ$ παρὰ τὰν κατὰ τὸ $Β$ ἐπιψαύουσαν τῆς τοῦ κώνου τομᾶς, ἔσσειται, ὥς ἡ $ΒΔ$ ποτὶ τὰν $ΒΖ$, δυνάμει ἡ $ΑΔ$ ποτὶ τὰν $ΕΖ$.

ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ'.

Ἐστω τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ $ΒΔ$ ἀπὸ μέσας τῆς $ΑΓ$ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθῶ ἢ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἡ $ΒΓ$ εὐθεῖα ἐπιτευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δὴ καὶ ἀχθῇ τις ἄλλα ἡ $ΖΘ$ παρὰ τὰν $ΒΔ$ τέμνουσα τὰν διὰ τῶν $Β$, $Γ$ εὐθειαν, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ἡ $ΖΘ$ ποτὶ τὰν $ΘΗ$, ὃν ἡ $ΔΑ$ ποτὶ τὰν $ΔΖ$.



ἀχθῶ γὰρ διὰ τοῦ $Η$ παρὰ τὰν $ΑΓ$ ἡ $ΚΗ$ ἔστιν ὁρμῇ, ὥς ἡ $ΒΔ$ ποτὶ

πιστεύεται δὲ ὅτι ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων δὲν ὕστερὶ τῶν θεωρημάτων, τὰ ὅποια ἀπεδείχθησαν χωρὶς τὴν βοήθειαν τοῦ λήμματος τούτου.

μοῦ εἶναι δὲ ἀρκετόν, ἂν τὰ ὑπ' ἐμοῦ εὑρεθέντα θεωρήματα ἔχουν τὸν αὐτὸν βαθμὸν ἀληθείας, ὅπως τὰ ἀνωτέρω ἀναφερόμενα.

τώρα, ἀφοῦ συνέγραψα τὰς ἀποδείξεις, σοῦ τὰς ἀποστέλλω, ἐν πρώτοις μὲν τὰς ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς μηχανικῆς στηριζόμενας, κατόπιν δὲ τὰς ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν. προτάσσω δὲ τούτων στοιχεῖα τῶν κωνικῶν τομῶν, τὰ ὅποια εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

α'.

Ἐάν δοθῇ τομὴ ὀρθογωνίου κώνου (παραβολή) ἥτοι ἡ ΑΒΓ, καὶ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον (τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς) ἢ ἡ ἴδια νὰ εἶναι διάμετρος, ἢ δὲ ΑΓ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ· καὶ ἂν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ τότε ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

β'.

Ἐάν δοθῇ τομὴ ὀρθογωνίου κώνου (παραβολή) ἡ ΑΒΓ, εἶναι δὲ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ ἴδια εἶναι διάμετρος, (ἄξων παραβολῆς) ἢ δὲ ΑΔΓ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, ἢ δὲ ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, τότε ἡ ΒΔ=ΒΕ.

γ'.

Ἐάν δοθῇ ἡ παραβολὴ ΑΒΓ ἢ δὲ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ ἡ ἴδια εἶναι διάμετρος, καὶ ἡ ΑΔ καὶ ΕΖ παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία $ΒΔ : ΒΖ = (ΑΔ)^2 : (ΕΖ)^2$. Ταῦτα ἔχουν ἀποδειχθῇ εἰς τὰ στοιχεῖα περὶ κωνικῶν τομῶν.

δ'.

Ἐστω τμημία περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, τὸ ΑΒΓ, ἢ δὲ ΒΔ ὡς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ, παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἢ ἡ ἴδια νὰ εἶναι διάμετρος καὶ ὡς ἀχθῇ ἡ ΒΓ, ἢ νὰ προεκβληθῇ αὕτη (δεύτερον σχῆμα). ἂν τώρα ἀχθῇ οἷα δῆποτε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἢ ΖΘ, τέμνουσα τὴν ΒΓ (ἢ τὴν προεκβολὴν τῆς, εἰς τὸ σημεῖον Θ), τότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία $ΖΘ : ΘΗ = ΔΑ : ΔΖ$.

διότι ἂν ἀχθῇ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, τότε εἶναι $ΒΔ : ΒΚ = (ΔΓ)^2 : (ΚΗ)^2$. διότι τοῦτο ἔχει ἤδη ἀποδειχθῇ. συνε-

πὼς $B\Gamma : B\Delta = (B\Gamma)^2 : (B\Delta)^2$ · διότι $\Delta Z = K\Theta$. ὡς ἐκ τούτου ἡ $B\Theta$ εἶναι μέση ἀνάλογος πρὸς τὴν $B\Gamma$ καὶ $B\Delta$ ὥστε $B\Gamma : B\Theta = \Gamma\Theta : \Theta\Delta$. συνεπῶς $\Gamma\Delta : \Delta Z = \Theta Z : \Theta\Delta$ ἢ δὲ $\Delta\Gamma = \Delta\Lambda$ · εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι $\Delta\Lambda : \Delta Z = Z\Theta : \Theta\Delta$.

ε'.

Ἐστω τὸ παραβολικὸν τμήμα $AB\Gamma$ καὶ ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ A ἡ ZA παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓZ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ .

ἔὰν εἰς τὸ τρίγωνον ZAG ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν AZ ἡ παράλληλος αὐτῇ θὰ τέμνεται ὑπὸ τῆς παραβολῆς εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα τέμνεται ἡ AG ὑπὸ τῆς παραλλήλου, καὶ δὴ τὸ τμήμα τῆς AG τὸ ὁποῖον πρόσκειται τοῦ A , θὰ εἶναι ὁμόλογον τοῦ τμήματος τῆς παραλλήλου, ἀπὸ τῆς παραβολῆς μέχρι τῆς τομῆς τῆς AG .

ἄς ἀχθῇ λοιπὸν ἡ ΔE παράλληλος πρὸς τὴν AZ καὶ ἄς τέμνη ἡ ΔE τὴν AG εἰς τὸ μέσον· ἐπειδὴ ἡ $AB\Gamma$ εἶναι παραβολὴ καὶ ἡ $B\Delta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ δὲ $AD = \Delta\Gamma$, ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον B θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AG . ἐπειδὴ πάλι ἡ ΔE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον καὶ ἡ ΓE ἔχει ἀχθῇ ὡς ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ , ἡ δὲ $\Delta\Gamma$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον B , τότε ἡ $EB = B\Delta$. ὥστε $AD : \Delta\Gamma = \Delta B : BE$. ἡ ἀπόδειξις ἔγινε διὰ τὴν περίπτωσιν πού ἡ ΔE τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν AG . ἔὰν τοῦτο δὲν συμβαίνει, ἄς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα $K\Lambda$ παράλληλος πρὸς τὴν AZ . τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $AK : K\Gamma = K\Theta : \Theta\Lambda$. ἐπειδὴ $BE = B\Delta$ εἶναι καὶ $IL = KI$, συνεπῶς $AK : KI = AG : \Delta\Lambda$. ἔχει δὲ καὶ $KI : K\Theta = \Delta\Lambda : AK$ · διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ προηγουμένως. ὥστε $K\Theta : \Theta\Lambda = AK : K\Gamma$. ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ ζητούμενον.

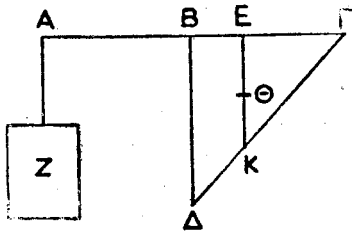
στ'.

Ἐς βοηθῇ τὸ παρατιθέμενον σχῆμα εὐρισκόμενον ἐπὶ κατακόρυφου ἐπιπέδου, τὸ μέρος τῆς εὐθείας εἰς τὴν ὁποίαν κεῖται τὸ σημεῖον Δ ἄς βοηθῇ πρὸς τὸ κάτω μέρος, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς τὸ ἄνω, ἔστω δὲ τὸ τρίγωνον $B\Gamma\Delta$ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν B καὶ ἔχον τὴν πλευρὰν $B\Gamma = AB$, ἄς βοηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον τοῦτο ἐξηρητημένον ἐκ τῶν σημείων B καὶ Γ , ἄς θεωρηθῇ δὲ ἐπιφάνεια Z ἐξηρητημένη ἐκ τοῦ σημείου A οὕτως, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Z νὰ ἰσορροπῇ τὸ τρίγωνον, ὅπως εὐρίσκεται· ἰσχυρίζομαι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Z εἶναι τὸ ἐν τρίτον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου $B\Gamma\Delta$.

ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ, ἡ εὐθεῖα AG εἶναι ὀριζοντία καὶ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν AG εἶναι κατακόρυφοι, ὡς

κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σημείων, κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ Ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α κρεμᾶμενον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται. φανί δὴ, τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΔΓ τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν.

ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη καὶ ἡ ΑΓ γραμμὰ παρὰ τὸν ὀρίζοντα, αἱ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τῇ ΑΓ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὀρίζοντα καθέτοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὀρίζοντα. τεμάσθω



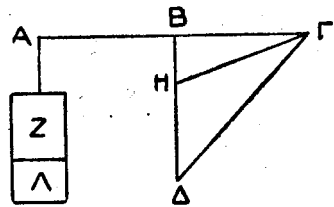
δὴ ἡ ΒΓ γραμμὰ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν ΓΕ τὰς ΕΒ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΒ ἡ ΚΕ καὶ τεμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ τοῦ δὴ ΒΔΓ τριγώνου κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. εἴ καὶ οὖν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου ἡ μὲν κατὰ τὰ Β, Γ κρέμασις λυθῇ, κατὰ δὲ τὸ Ε κρεμασθῇ, μεγεῖ τὸ

τρίγωνον, ὥς νῦν ἔχει· ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμασμένων, ἐξ οὗ σημείου καὶ κατὰσταθῇ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τὸ τε σημεῖον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κρεμασμένου· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἔξει κατάστασιν τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ Ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεύονται τὸ μὲν Ζ κρεμᾶμενον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, δηλόν, ὥς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκρυσιν, καὶ ἐστίν, ὥς ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον. τριπλασία δὲ ἡ ΑΒ τὰς ΒΕ· καὶ τὸ ΒΔΓ ἄρα τρίγωνον τριπλασίον ἐστὶ τοῦ Ζ χωρίου.

φανερὸν δὲ [ὅτι] καί, εἴ καὶ τριπλασίον ἢ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ Ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ'.

Ἐστω πάλιν ζυγός ἡ ΑΓ γραμμὰ, μέσον δὲ αὐτᾶς ἔστω τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὴ Β [τὸ ΓΔΗ τρίγωνον], τὸ δὲ ΓΔΗ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΗ, ὕψος δὲ τὰν ἴσας ἐοῦσαν τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ ΔΓΗ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σημείων, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμᾶμενον κατὰ τὸ Α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ ΓΔΗ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ Ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ ΓΔΗ τριγώνου.



κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α τρίτον μέρος ἐὼν τοῦ ΒΓΗ τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον τῷ ΖΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΓΗ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ Α, τὸ δὲ ΒΓΔ τῷ ΖΑ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΑ, φανερὸν, ὅτι καὶ τὸ ΓΔΗ τρίγωνον τριπλασίον τοῦ Ζ.

κείμεναι ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου. ἄς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε $ΓΕ = 2 ΒΕ$ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΚΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ καὶ ἄς ληφθῇ $ΕΘ = ΘΚ$. τὸ σημεῖον Θ εἶναι συνεπῶς τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΔΓ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Μηχανικά (ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν Ι). ἔάν τὸ τρίγωνον τὸ θεωρήσωμεν τώρα ἐξηρητημένον, ὅχι ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ἀλλὰ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, θὰ μείνῃ τοῦτο ὡς ἔχει (δηλ. ἐν ἰσορροπία). διότι τὸ κέντρον βάρους (Θ) τοῦ τριγώνου εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Ε· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἔχει τὴν αὐτὴν θέσιν ὡς πρὸς τὸν ζυγόν (τὴν φάλαγγα ΑΒΓ) θὰ εὐρίσκεται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, ὁμοίως ἐν ἰσορροπία. ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἐκ τοῦ Α ἐξαρτωμένη ἐπιφάνεια Ζ καὶ τὸ ἐκ τοῦ Ε ἐξαρτώμενον τρίγωνον ΒΔΓ εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπία, εἶναι προφανές ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι αὗται εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων (ΑΒ, ΒΕ) καὶ συνεπῶς $ΑΒ : ΒΕ = \text{τριγ. ΒΔΓ} : Ζ$. εἶναι δὲ ἡ ΑΒ τριπλάσια τῆς ΒΕ· καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ· ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι ὅταν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ θὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία.

ζ'.

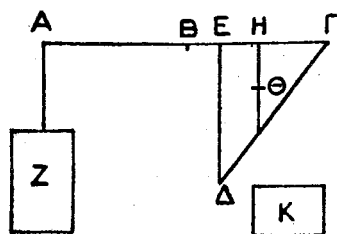
Ἔστω πάλιν ὡς ζυγός ἡ γραμμὴ ΑΓ, τὸ μέσον δὲ αὐτῆς ἔστω τὸ Β καὶ ἄς ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ Β τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΓΔΗ, ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΔΗ ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ζυγοῦ καὶ ἄς θεωρηθῇ τὸ τρίγωνον ἐξηρητημένον ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἄς θεωρηθῇ ἐξηρητημένη ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ ὅτι ἰσορροπεῖ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ, ὅπως εὐρίσκεται. κατὰ τὸν ἴδιον τρόπο θ' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι τὸ ἐν τρίτον τοῦ τριγώνου ΓΔΗ.

ἄς ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἄλλῃ ἐπιφάνεια (ἔστω ἡ Λ) ἡ ὁποία νὰ εἶναι τὸ ἐν τρίτον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου ΒΓΗ· τὸ τρίγωνον ΒΔΓ θὰ ἰσορροπήσῃ τὰς ἐπιφανείας Ζ+Λ· ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΒΓΗ ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Λ, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΓΔ τὰς ἐπιφανείας Ζ+Λ, αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ ἐν τρίτον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΔΗ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ.

η'.

Ἔστω (φάλαγξ) ζυγοῦ ἡ ΑΒΓ, τὸ μέσον αὐτῆς καὶ τὸ σημεῖον στηρίζεως τὸ Β, τὸ δὲ τρίγωνον ΓΔΕ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Ε, ἀνηρητημένον ἐκ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Ε, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Α ἄς ἐξαρτηθῇ ἡ ἐπιφάνεια Ζ ὥστε νὰ ἰσορροπῇ τὸ τρίγωνον ὅπως τώρα εὐρίσκεται, καὶ ἄς ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $ΑΒ : ΒΕ = \text{τρίγωνον ΓΔΕ} : \text{δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν Κ}$. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικροτέρα τοῦ τριγώνου ΓΔΕ καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας Κ.

Ἐστω ζυγὸς ὁ ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΕ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Ε γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ζ, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ



Α καὶ ἰσορροπεῖται τῷ ΓΔΕ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ χωρίον. φανὶ δὴ, τὸ Ζ χωρίον τοῦ μὲν ΓΔΕ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ Κ μείζον.

λελάφθω γὰρ τοῦ ΔΕΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἡ ΘΗ ἄρθω παρὰ τὰν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ Ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ΓΔΕ χωρίον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ ΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ Ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἡ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΗ, ποτὶ δὲ τὸ Κ, ὃν ἡ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, δηλόν, ὥς μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε μείζον ἐστι τὸ Ζ τοῦ Κ.

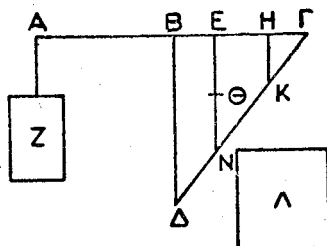
θ'.

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΚ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΚ, ὕψος δὲ τὰν ΕΓ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπεῖται τῷ ΔΓΚ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς τῶν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΓΔΚ τρίγωνον ποτὶ τὸ Α. φανὶ δὴ, τὸ Ζ τοῦ μὲν Α μείζον εἶμεν, τοῦ δὲ ΔΓΚ ἔλασσον.

δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι'.

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΒΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΚΔ πλευρὰν ἐπὶ τὸ Γ νεύουσαν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΒΔΚΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Α, κρεμάσθω δὲ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η σαμεῖα, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπεῖται τῷ ΒΔΚΗ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν ὑπόκειται. φανὶ, τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ Α.



τετράσθω γὰρ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον ἡ διπλασία τὰς ΒΔ καὶ ἡ ΚΗ ποτὶ τὰν διπλασίαν τὰς ΚΗ καὶ τὰν ΒΔ, τοῦτον ἔχουν τὰν ΕΗ ποτὶ τὰν ΒΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὰν ΒΔ ἀχθεῖσα ἡ ΕΝ τετμά.

διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Θ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ. ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, ὑπάρχει ἡ σχέσις τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. $Z=AB: BH$.

ἐπειδὴ δὲ τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. $Z=AB: BH$ καὶ τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. $K=AB: BE$, εἶναι φανερόν ὅτι ὁ λόγος τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. Κ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. Ζ· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας Κ.

θ'.

ἔστω πάλιν (φάλαγγξ) ζυγοῦ ΑΓ, μέσον αὐτῆς τὸ Β τὸ δὲ τρίγωνον ΓΔΚ ἀμβλυγώνιον, ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΔΚ ὕψος δὲ τὴν ΕΓ καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ τοῦτο ἐκ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεία Γ, Ε, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Α καὶ ἂς ἰσορροπήσῃ αὕτη τὸ τρίγωνον, οὕτως ἔχον, ὥς τώρα εὑρίσκεται, ἂς ὑπάρχει δὲ ἡ σχέσις $AB: BE = \text{τριγ. ΓΔΚ} : \text{ἐπιφ. Λ}$. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας Λ καὶ μικρότερα τοῦ τριγώνου ΔΓΚ. τοῦτο ἀποδεικνύεται ὅπως καὶ τὸ προηγούμενον.

ι'.

ἔστω πάλιν ὁ ζυγὸς ΑΒΓ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἔχον τὰς εἰς τὰ σημεία Β καὶ Η γωνίας ὀρθάς, τὴν δὲ πλευρὰν ΚΔ περατουμένην εἰς τὸ Γ, ἂς ὑπάρχει δὲ ἡ σχέσις $AB: BH = \text{τραπ. ΒΔΗΚ} : \Lambda$, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ εἰς τὰ σημεία Β, Η, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ ἂς ἰσορροπεῖ αὕτη τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ ὅπως τοῦτο τώρα εἶναι ἐξηρητημένον. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικρότερα τῆς Λ. ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $(2\Delta B + KH) : (2KH + \Delta D) = EH: BE$ καὶ διὰ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἢ ΕΝ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω τὸ Θ· τότε τὸ Θ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπέζιου· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Μηχανικά. ἐάν τώρα τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ παύσῃ νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ σημεία Β, Η καὶ ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε, θὰ παραμείνῃ τοῦτο, ὥς εὑρίσκετο πρότερον καὶ θὰ ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἐξηρητημένον κατὰ τὸ σημεῖον Ε ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ ἐξηρητημένην κατὰ τὸ σημεῖον Α, θὰ ὑπάρχει ἡ σχέσις $AB: BE = \text{τραπ. ΒΔΗΚ} : \text{ἐπιφ. Ζ}$. ἄρα ὁ λόγος τοῦ τραπέζιου ΒΔΗΚ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν λόγον τοῦ τραπέζιου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Λ, ἐπειδὴ ὁ λόγος $AB: BE$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $AB: BH$ · ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικρότερα τῆς ἐπιφανείας Λ.

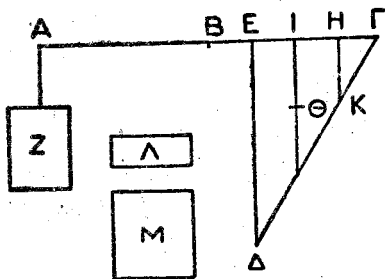
σθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ Θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. ἦν οὖν τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ Ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η σαιμίων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ ἰσορροπεῖ τῷ Ζ χωρίῳ. ἔπει οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ τὸ Ε κρεμάμενον τῷ Ζ χωρίῳ κατὰ τὸ Α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται, ὥς ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ ἢ περ ποτὶ τὸ Λ, ἔπει καὶ ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ Ζ τοῦ Λ.

ια'.

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, τὰς δὲ ΔΡ, ΚΤ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, καὶ ἂ ΔΡ ἐπὶ τὸ Β πιπτέτω, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, τὸ δὲ ΔΚΤΡ τραπέζιον κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ Ζ τῷ ΔΚΡΤ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ Ζ χωρίον τοῦ Λ.

ιβ'.

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΔΕΚΗ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ε, Η σαιμίοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ ΚΔ, ΕΗ γραμμὰς ποτὶ τὸ Γ νευούσας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἂ

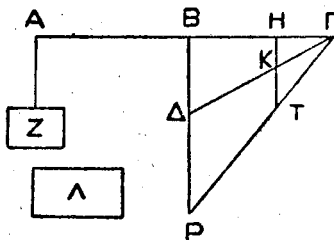


ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ τοῦτον τὸν λόγον ἔχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τῷ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν ὑπόκειται. φανὶ δὲ, τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μείζον εἶμεν, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

ἔλαβον γὰρ τοῦ ΔΚΕΗ τραπέζιου τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἔστω δὲ τὸ Θ· λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον· καὶ ἄγω τὰν ΘΙ παρὰ τὰν ΔΕ. ἂν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθῇ κατὰ τὸ Ι, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Η λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν καὶ ἰσορροπήσῃ τῷ Ζ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἔπει δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ Ι τῷ Ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ Α, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΙ· δηλὸν οὖν, ὅτι τὸ ΔΚΕΗ ποτὶ μὲν τὸ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ποτὶ τὸ Ζ, ποτὶ δὲ τὸ Μ ἔλασσονα ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μείζον ἐστὶ, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

ια'.

"Εστω πάλι ὁ ζυγὸς ΑΓ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΚΔΤΡ ἔχον τὰς πλευρὰς ΚΔ, ΤΡ, συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ, τὰς δὲ πλευρὰς ΔΡ, ΚΤ καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ΔΡ νὰ διέρχεται ἐκ τοῦ Β, νὰ ὑπάρχῃ δὲ ἡ σχέσις $AB: BH = \text{τραπέζ. ΔΚΤΡ}$: ἐπιφ. Λ, τὸ δὲ τραπέζιον ΔΚΤΡ ἄς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεία Β, Η καὶ ἡ ἐπιφάνεια Ζ κατὰ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἄς ἰσορροπεῖ ἡ ἐπιφάνεια Ζ τὸ τραπέζιον ΔΚΤΡ, οὕτως ἔχον ὥς τώρα κεῖται. ὅπως προηγουμένως, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικρότερα τῆς ἐπιφανείας Λ.



ιβ'.

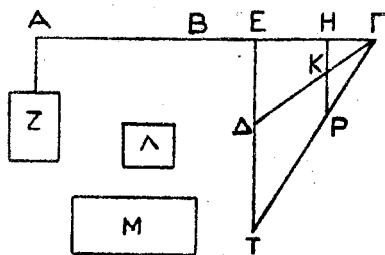
"Εστω πάλι ὁ ζυγὸς ΑΓ, μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΔΕΚΗ ἔχον τὰς κατὰ τὰ σημεία Ε, Η, γωνίας ὀρθάς, τὰς δὲ πλευρὰς ΚΔ καὶ ΕΗ συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ καὶ ἄς ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $AB: BH = \text{τραπ. ΔΚΕΗ}$: ἐπιφ. Μ, ἐπίσης δὲ $AB: BE = \text{τραπ. ΔΚΕΗ}$: ἐπιφ. Λ, ἄς ἀναρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ΔΚΕΗ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεία Ε, Η, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἄς ἀναρτηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Α καὶ ἄς ἰσορροπεῖ αὕτη τὸ τραπέζιον ὅπως τοῦτο τώρα εὐρίσκεται. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας Λ καὶ μικρότερα τῆς ἐπιφανείας Μ.

προσδιώρισα δηλαδὴ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπέζιου ΔΚΕΗ καὶ ἔστω τοῦτο τὸ Θ· τοῦτο λαμβάνεται ὅπως προηγουμένως· καὶ ἔφερα τὴν ΘΙ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ. ἂν τώρα τὸ τραπέζιον ἀναρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ σημεῖον Ι καὶ οὐχὶ ἐκ τῶν σημείων Ε, Η θὰ παραμείνῃ τοῦτο εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν καὶ θὰ ἰσορροπήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ποὺ ἔχουν ἐκτεθῇ προηγουμένως. ἐπειδὴ δὲ τὸ τραπέζιον ἀνηρτημένον κατὰ τὸ σημεῖον Ι ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ ἀνηρτημένην κατὰ τὸ σημεῖον Α, θὰ ὑπάρχει ἡ σχέσις $\text{τραπ. ΔΚΕΗ}: \text{ἐπιφ. Ζ} = AB: BI$. εἶναι λοιπὸν φανερόν ὅτι ὁ λόγος $\text{ΔΚΕΗ}: \Lambda$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $\text{ΔΚΕΗ}: Ζ$ καὶ $\text{ΔΚΕΗ}: Μ$ μικρότερος τοῦ λόγου $\text{ΔΚΕΗ}: Ζ$ · ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλύτερα μὲν τῆς Λ, μικρότερα δὲ τῆς Μ.

ιγ'.

"Εστω πάλι ὁ ζυγὸς ΑΓ, τὸ μέσον αὐτοῦ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΚΔΤΡ ἔχον τὰς πλευρὰς ΚΔ, ΤΡ, συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΤ, ΚΡ καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἄς ἀναρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεία Ε, Η, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἄς ἀναρτηθῇ κατὰ τὸ Α καὶ ἄς ἰσορροπεῖ αὕτη τὸ τραπέζιον ΔΚΤΡ ὅπως τοῦτο εὐρίσκεται, ἄς

Ἐστω πάλιν τὸ μὲν $ΑΓ$ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ $Β$, τὸ δὲ $ΚΑΤΡ$ τραπέζιον, ὥστε τὰς μὲν $ΚΔ$, $ΤΡ$ πλευρὰς νενοῦσας εἶμεν ἐπὶ τὸ



$Γ$, τὰς δὲ $ΔΤ$, $ΚΡ$ καθέτους ἐπὶ τὰν $ΒΓ$, κρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ $Ε$, $Η$, τὸ δὲ $Ζ$ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ $Α$ καὶ ἰσορροπεῖτω τῷ $ΔΚΤΡ$ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἃ $ΑΒ$ ποτὶ τὰν $ΒΕ$, τοῦτον ἔχέτω τὸ $ΔΚΤΡ$ τραπέζιον ποτὶ τὸ $Λ$ χωρίον, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἃ $ΑΒ$ ποτὶ τὰν $ΒΗ$, τοῦτον ἔχέτω

τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ $Μ$. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ $Ζ$ τοῦ μὲν $Λ$ μείζον, τοῦ δὲ $Μ$ ἔλασσον.

ιδ'.

Ἐστω τμήμα τὸ $ΒΘΓ$ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἃ $ΒΓ$ ποτ' ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ $Β$ σημείου ἃ $ΒΔ$ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ $Γ$ ἃ $ΓΔ$ ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ $Γ$ ἐσσεῖται δὴ τὸ $ΒΓΔ$ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διηρησθῶ δὴ ἃ $ΒΓ$ ἐς ἴσα τμήματα ὅποσαοῦν τὰ $ΒΕ$, $ΕΖ$, $ΖΗ$, $ΗΙ$, $ΙΓ$, καὶ ἀπὸ τὰν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ $ΕΣ$, $ΖΤ$, $ΗΥ$, $ΙΞ$, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὐταὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεξεύχθωσαν ἐπὶ τὸ $Γ$ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φανί δὴ τὸ τρίγωνον τὸ $ΒΔΓ$ τῶν μὲν τραπέζιων τῶν $ΚΕ$, $ΛΖ$, $ΜΗ$, $ΝΙ$ καὶ τοῦ $ΞΙΓ$ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπέζιων ὧν $ΖΦ$, $ΗΘ$, $ΙΠ$ καὶ τοῦ $ΙΟΓ$ τριγώνου μείζον [ἔστιν] ἢ τριπλάσιον.

διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἃ $ΑΒΓ$, καὶ ἀπολεάφθω ἃ $ΑΒ$ ἴσα τῇ $ΒΓ$, καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ $ΑΓ$. μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ $Β$. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ $Β$, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ $ΒΔΓ$ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ $Β$, $Γ$, ἐν δὲ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ $Ρ$, $Χ$, $Ω$, $Δ$ χωρία κατὰ τὸ $Α$, καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ μὲν $Ρ$ χωρίον τῷ $ΔΕ$ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ $Χ$ τῷ $ΖΣ$ τραπέζιῳ, τὸ δὲ $Ψ$ τῷ $ΤΗ$, τὸ δὲ $Ω$ τῷ $ΥΙ$, τὸ δὲ $Δ$ τῷ $ΞΙΓ$ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ $ΒΔΓ$ τρίγωνον τοῦ $ΡΧΨΩΔ$ χωρίου. καὶ ἐπεὶ ἔστιν τμήμα τὸ $ΒΓΘ$, ὃ περιέχεται ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ $Β$ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται ἃ $ΒΔ$, ἀπὸ δὲ τοῦ $Γ$ ἃ $ΓΔ$ ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ $Γ$, ἄκται δὲ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἃ $ΣΕ$, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἃ $ΒΓ$ ποτὶ τὰν $ΒΕ$, ὃν ἃ $ΣΕ$ ποτὶ τὰν $ΕΦ$. ὥστε καὶ ἃ $ΒΑ$ ποτὶ τὰν $ΒΕ$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ $ΔΕ$ τραπέζιον ποτὶ τὸ $ΚΕ$. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἃ $ΑΒ$ ποτὶ τὰν $ΒΖ$ τὸν αὐτὸν ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ $ΣΖ$ τραπέζιον ποτὶ τὸ $ΛΖ$, ποτὶ δὲ τὰν $ΒΗ$, ὃν τὸ $ΤΗ$ ποτὶ τὸ $ΜΗ$, ποτὶ δὲ τὰν

ὑπάρχει δὲ ἡ σχέσις $AB : BE = \text{τραπ. } \Delta KTP : \text{ἐπιφ. } \Lambda$. ἐπίσης δὲ $AB : BH = \text{τραπ. } \Delta KTP : \text{ἐπιφ. } M$. ὥπως εἰς τὸ προηγούμενον, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Z εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας Λ καὶ μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας M .

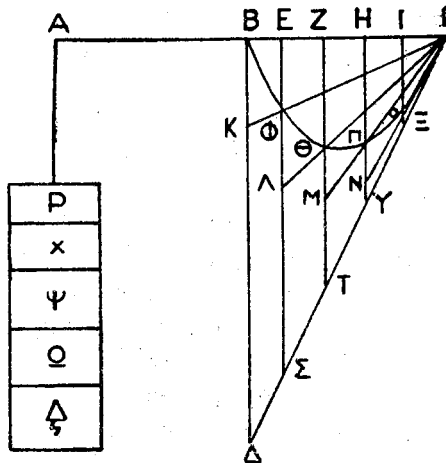
ιδ'.

Ἐστω τὸ τμήμα $B\Gamma\Theta$ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς. ἡ $B\Gamma$ ἔστω πρῶτον κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ ὥς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου B ἡ $B\Delta$ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Γ , ἡ $\Gamma\Delta$ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ . τὸ τρίγωνον $B\Gamma\Delta$ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον. ὥς διαιρεθῇ δὲ ἡ $B\Gamma$ εἰς ὅσα δήποτε ἴσα τμήματα τὰ $BE, EZ, ZH, HI, I\Gamma$ καὶ ὥς ἀχθῶσιν ἀπὸ τὰς τομὰς παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον αἱ $ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ$, τὰ δὲ σημεία ποὺ αἱ παράλληλοι αὗται τεμνοῦν τὴν παραβολὴν ὥς ἐνωθοῦν μὲ τὸ Γ καὶ ὥς προεκταθοῦν (αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐνοῦσαι τὸ σημεῖον Γ καὶ τὰ σημεία τομῆς τῆς παραβολῆς ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος). λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον $B\Delta\Gamma$ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἄθροίσματος, τῶν τραπεζίων $ΚΕ, \Lambda Z, ΜΗ, ΝΙ$ καὶ τοῦ τριγώνου $\Xi I\Gamma$, μεγαλυτέρον δὲ τοῦ τριπλασίου ἄθροίσματος, τῶν τραπεζίων $Z\Phi, Η\Theta, I\Pi$, καὶ τοῦ τριγώνου $I O\Gamma$.

διότι ὥς διχοτομηθῇ ἡ εὐθεῖα $AB\Gamma$ καὶ ὥς ληθῇ ἡ $AB = B\Gamma$ καὶ ὥς θεωρηθῇ ἡ $A\Gamma$ ὡς ζυγὸς (μοχλός)· καὶ ὥς σημεῖον στηρίζεως αὐτοῦ τὸ B · ὥς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον $B\Delta\Gamma$ ἐκ τῶν σημείων B, Γ , ἀπὸ δὲ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ζυγοῦ, εἰς τὸ σημεῖον A , ὥς ἐξαρτηθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι $P, X, \Psi, \Omega, \Delta$, καὶ ὥς ἰσορροπεῖ ἡ ἐπιφάνεια P τὸ τραπέζιον ΔE , ὡς τοῦτο εὐρίσκεται, ἡ ἐπιφάνεια X τὸ τραπέζιον $Z\Sigma$, ἡ ἐπιφάνεια Ψ τὸ τραπέζιον TH , ἡ ἐπιφάνεια Ω τὸ τραπέζιον YI , καὶ ἐπιφάνεια Δ τὸ τρίγωνον $\Xi I\Gamma$. τότε τὸ ὅλον σύστημα θὰ εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. ὥστε τὸ τρίγωνον $B\Delta\Gamma$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἐπιφανειῶν $P + X + \Psi + \Omega + \Delta$.

καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει τὸ τμήμα $B\Gamma\Theta$, τὸ ὅποιον περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ὀρθογωνίου κώνου (παραβολικὸν τμήμα $B\Gamma\Theta$) ἐκ τοῦ B ἔχει ἀχθῇ ἡ $B\Delta$ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἐκ δὲ τοῦ Γ ἡ $\Gamma\Delta$ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ , πλὴν δὲ τούτου, ἡ ΣE ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, θὰ ὑπάρχει ἡ σχέσις (§ ε'.) $B\Gamma : BE = \Sigma E : E\Phi$. ὥστε $BA : BE = \text{τραπέζιον } \Delta E : \text{τραπέζιον } KE$. κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι $AB : BZ = \text{τραπέζιον } \Sigma Z : \text{τραπέζιον } \Lambda Z$, $AB : BH = \text{τραπ. } TH : \text{τραπ. } MH$, $AB : BI = \text{τραπέζ. } YI : NI$. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΔE εἶναι κατὰ τὰ σημεία B, E , ὀρθογώνιον, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ ($BE, \Delta\Sigma$) συγκλίνουν κατὰ τὸ Γ , ἰσορροπεῖ δὲ τοῦτο, ὥς τώρα εὐρίσκεται τὴν ἐπιφάνειαν P ἐξηρητημένην ἐκ τοῦ σημείου A τοῦ ζυγοῦ, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει ἡ

BI, ὃν τὸ YI ποτὶ τὸ NI. ἔπει οὖν ἔστι τραπέζιον τὸ ΔΕ τὰς μὲν ποτὶ τοῖς B, E σαιμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ Γ νεύουσας, ἰσορροπεῖ δὲ τι χωρίον αὐτῷ τὸ Ρ κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπέζιου, ὥς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὥς ἂ BA ποτὶ τὰν BE, οὕτως τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΞ, μείζον ἄρα ἐστὶν τὸ ΚΕ χωρίον τοῦ Ρ χωρίου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ καὶ τὸ ΖΣ τραπέζιον τὰν μὲν ποτὶ τοῖς Z, E γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΣΤ νεύουσιν ἐπὶ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ Χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπέζιου, ὥς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὥς μὲν ἂ AB ποτὶ τὰν BE, οὕτως τὸ



$\Sigma \Sigma$ τραπεζίον ποτὶ τὸ ΖΦ , ὥς δὲ
 α AB ποτὶ τὰν BZ , οὕτως τὸ $\Sigma \Sigma$
 τραπεζίον ποτὶ τὸ $\Lambda \text{Ζ}$. εἴη οὖν κα
 τὸ X χωρίον τοῦ μὲν $\Lambda \text{Ζ}$ τραπεζίου
 ἔλασσον, τοῦ δὲ ΖΦ μείζον· δέδει-
 κται γὰρ καὶ τοῦτο· διὰ τὰ αὐτὰ
 δὴ καὶ τὸ Ψ χωρίον τοῦ μὲν MH
 τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΘH μεί-
 ζον, καὶ τὸ Ω χωρίον τοῦ μὲν
 NOIH τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ
 ΠI μείζον, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Δ
 χωρίον τοῦ μὲν $\Xi \text{IΓ}$ τριγώνου
 ἔλασσον, τοῦ δὲ ΓIO μείζον. ἐπεὶ
 οὖν τὸ μὲν KE τραπεζίον μείζον

ἔστι τοῦ Ρ χωρίου, τὸ δὲ ΑΖ τοῦ Χ, τὸ δὲ ΜΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΝΙ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΕΙΓ τρίγωνον τοῦ Δ, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μεῖζονά ἐστι τοῦ ΡΧΜΩΔ χωρίου. ἔστιν δὲ τὸ ΡΧΨΩΔ τρίτον μέρος τοῦ ΒΓΔ τριγώνου· ὁῦλον ἄρα, ὅτι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΚΕ, ΑΖ, ΜΗ, ΝΙ τραπεζίων καὶ τοῦ ΕΙΓ τριγώνου. πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν ΖΦ τραπέzion ἔλασσόν ἐστι τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΘΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΙΠ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΙΟΓ τρίγωνον τοῦ Δ, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἔλασσονά ἐστι τοῦ ΔΩΨΧ χωρίου· φανερόν οὖν, ὅτι καὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΙΓΟ τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

1ε'.

Ἔστω πάλιν τὸ ΒΘΓ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογώνιου κώνου τομᾶς, ἃ δὲ ΒΓ μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ἀναγκαῖον δὴ ἦτοι τὰν ἀπὸ τοῦ Β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμήματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ Γ ἀμβλείαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν ΒΓ. ἔστω ἃ τὰν ἀμβλείαν ποιοῦσα ἃ ποτὶ τῷ Β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἃ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψάουσα τὰς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, καὶ διηρησθῶ ἃ ΒΓ εἰς τμήματα ἴσα ὅποσαοὺν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ,

σχέσις $BA : BE = \text{τραπέζ. } \Delta E : \text{τραπ. } KE$, τὸ τραπέζιον KE εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας P . διότι τοῦτο ἔχει ἤδη ἀποδειχθῆ (§ ι'). πάλι δὲ τὸ τραπέζιον ZS εἶναι κατὰ τὰ σημεία Z, E , ὀρθογώνιον, ἡ δὲ πλευρά του ST συγκλίνει κατὰ τὸ Γ , ἰσορροπεῖ δὲ τοῦτο, ὡς τώρα εὐρίσκεται, τὴν ἐπιφάνειαν X ἐξηρητημένην ἐκ τοῦ σημείου A τοῦ ζυγοῦ, καὶ ὑπάρχει ἡ σχέσις $AB : BE = \text{τραπ. } ZS : \text{τραπ. } Z\Phi$, καὶ $AB : BZ = \text{τραπ. } ZS : \text{τραπ. } \Lambda Z$. θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια X τοῦ μὲν τραπεζίου ΛZ μικρότερα, τοῦ δὲ τραπεζίου $Z\Phi$ μεγαλύτερα· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (§ ιβ'). διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ἐπιφάνεια Ψ εἶναι μικρότερα τοῦ τραπεζίου MH , καὶ μεγαλύτερα τοῦ τραπεζίου ΘH , καὶ ἡ ἐπιφάνεια Ω εἶναι μικρότερα τοῦ τραπεζίου $NOIH$ καὶ μεγαλύτερα τοῦ τραπεζίου ΠI , ἐπίσης δὲ ἡ ἐπιφάνεια Δ εἶναι μικρότερα τοῦ τριγώνου $\Xi I\Gamma$ καὶ μεγαλύτερα τοῦ τριγώνου ΓIO . ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον KE εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας P , τὸ τραπέζιον ΛZ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας X , τὸ τραπέζιον MH εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ψ , τὸ τραπέζιον NI εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ω , καὶ τὸ τρίγωνον $\Xi I\Gamma$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Δ , εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλαι αἱ εἰρημέναι ἐπιφάνειαι (τῶν τραπεζίων ὁμοῦ)* εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ἐπιφανειῶν $P+X+\Psi+\Omega+\Delta$. εἶναι δὲ αἱ ἐπιφάνειαι $P+X+\Psi+\Omega+\Delta$ τὸ ἐν τρίτον τοῦ τριγώνου $B\Gamma\Delta$. εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον $B\Gamma\Delta$ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων $KE, \Lambda Z, MH, NI$ καὶ τοῦ τριγώνου $\Xi I\Gamma$. ἀφ' ἑτέρου δέ, ἐπειδὴ τὸ τραπέζιον $Z\Phi$ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας X , τὸ τραπέζιον ΘH εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Ψ , τὸ τραπέζιον IP εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Ω , καὶ τὸ τρίγωνον $IO\Gamma$ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Δ , εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν εἰρημένων τούτων τραπεζίων, εἶναι μικρότερον τῶν ἐπιφανειῶν $\Delta+\Omega+\Psi+X$. εἶναι ἄρα ἐπίσης φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον $B\Delta\Gamma$, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων $\Phi Z, \Theta H, IP$ καὶ τοῦ τριγώνου $IO\Gamma$, καὶ μικρότερον τοῦ τριπλασίου τῶν προαναφερθέντων (δηλ. μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων $KE, \Lambda Z, MH, NI$ καὶ τοῦ τριγώνου $\Xi I\Gamma$).

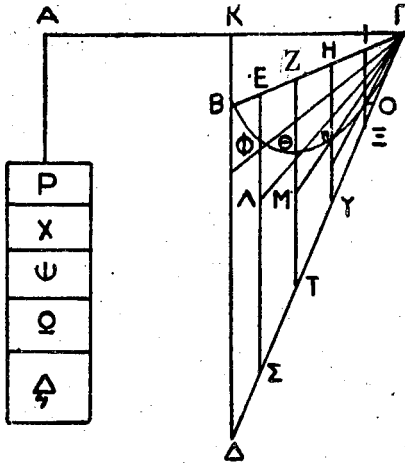
ιε'.

Ἔστω πάλι τὸ παραβολικὸν τμήμα $B\Theta\Gamma$ ἡ δὲ $B\Gamma$ νὰ μὴ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον· τότε κατ' ἀνάγκην ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου B ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ πρὸς τὸ μέρος ταύτης, θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς $B\Gamma$ γωνίαν ἀμβλείαν, ὡς ἐπίσης ἀμβλείαν γωνίαν θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς $B\Gamma$ ἡ ἐκ τοῦ Γ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς παραβόλης. ἔστω ἡ σχηματίζουσα τὴν ἀμβλείαν γωνίαν ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ B καὶ ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ $B\Delta$ καὶ ἀπὸ τοῦ

συν τριγ $\Xi I\Gamma$

ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Ζ, Η, Ι παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθῶσαν αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΕ, καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὐτὰι τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεξεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμί δὴ καὶ νῦν, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶν μὲν τραπέζιων τῶν ΒΦ, ΑΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΓΙΕ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΓΟΙ τριγώνου μείζον ἢ τριπλάσιον.

ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΒ ἐπὶ θάτερα. ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν ΓΚ τῇ ΓΚ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ΑΚ. νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον τὸ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Κ, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΓΚΔ τρίγωνον ἐκ τοῦ



ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Κ ἔχον, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ Α τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ χωρία, καὶ τὸ μὲν Ρ τῷ ΔΕ τραπέζιῳ ἰσορροπεῖται οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπέζιῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ τῷ ΓΙΕ τριγώνῳ· ἰσορροπῆσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ΡΧΨΩΔ χωρίου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ τε ΒΦ τραπέζιον τοῦ Ρ χωρίου μείζον, καὶ τὸ μὲν ΘΕ τραπέζιον

μείζον ἐδὼν τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΖΦ ἔλαττον, καὶ τὸ μὲν ΜΗ τραπέζιον μείζον ἐδὼν τοῦ Ψ χωρίου, τὸ δὲ ΗΘ ἔλασσον, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΝΙ τραπέζιον μείζον ἐδὼν τοῦ Ω χωρίου, τὸ δὲ ΙΠ ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν ΕΙΓ τρίγωνον μείζον τοῦ Δ χωρίου, τὸ δὲ ΓΙΟ ἔλασσον· ὁῦλον οὖν ἔστιν.

ις'.

Ἐστω πάλιν τμήμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου χομᾶς, καὶ ἀχθῶ διὰ μὲν τοῦ Β ἡ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ Ζ χωρίον. φαμί δὴ τὸ ΒΘΓ τμήμα ἴσον εἶμεν τῷ Ζ χωρίῳ.

εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἴσον, ἦτοι μείζον ἔστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζον· ἡ δὴ ὑπεροχά, ἣ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ Ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἑσσεῖται μείζον τοῦ ΒΓΔ τριγώνου. δυνατόν δέ ἔστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἑσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ἑσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἡ ΒΕ μέρος τᾶς ΒΔ. διηρησθῶ οὖν ἡ ΒΔ ἐς τὰ μέρη, καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσεων σαμεῖα τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ι, Κ σαμείων ἐπὶ τὸ Γ εὐθεῖαι ἐπεξεύχθωσαν·

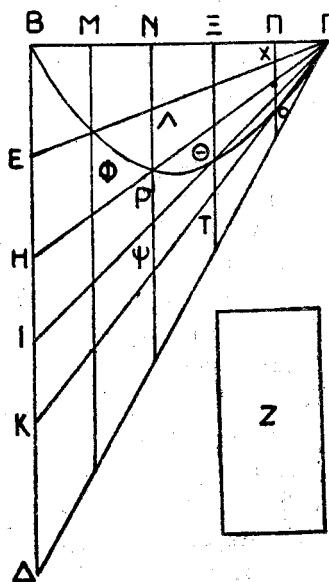
σημείου Γ ἢ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἄς διαιρεθῇ ἡ ΒΓ εἰς ὅσαδὴποτε ἴσα τμήματα ἔστω ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἐκ τῶν σημείων δὲ Ε, Ζ, Η, Ι, ἄς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς αἱ ΕΣ ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ τὰ σημεία εἰς τὰ ὁποῖα αὐταὶ τέμνουσιν τὴν παραβολὴν ἄς ἐνωθοῦν μετὰ τὸ Γ καὶ ἄς προεκταθοῦν πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος (ὥστε νὰ τμήσουν τὰς παραλλήλους). λέγω καὶ τώρα, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ τριγώνου ΓΙΞ, μεγαλύτερον δὲ τριπλασίου ἀθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ τριγώνου ΓΟΙ.

ἄς προεκταθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἀπὸ τὰς δύο διευθύνσεις της. ἐὰν φέρω τὴν κάθετον (ἐπὶ τὴν ΒΔ) τὴν ΓΚ λαμβάνω $ΓΚ = ΑΚ$. ἄς νοηθῇ πάλι ἡ ΑΓ ὡς ζυγὸς (μοχλός), μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ καὶ σημεῖον στηρίζεως ἐπίσης τὸ Κ, ἄς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον ΓΚΔ ἀπὸ τὸ ἡμισυ τοῦ ζυγοῦ ὅπως οὗτος εὐρίσκεται κατὰ τὰ σημεία Γ, Κ καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ζυγοῦ, ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, ἄς ἐξαρτηθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ, καὶ ἄς ἰσορροπῇ ἡ ἐπιφάνεια Ρ τὸ τραπέζιον ΔΕ, ὅπως τοῦτο εὐρίσκεται, ἡ ἐπιφάνεια Χ τὸ τραπέζιον ΖΣ, ἡ ἐπιφάνεια Ψ τὸ τραπέζιον ΤΗ, ἡ ἐπιφάνεια Ω τὸ τραπέζιον ΥΙ, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Δ τὸ τρίγωνον ΓΙΞ. τὸ ὅλον σύστημα θὰ εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. ὥστε, τὸ τρίγωνον ΔΒΓ θὰ εἶναι τριπλάσιον τῶν ἐπιφανειῶν $P + X + \Psi + \Omega + \Delta$. ὅπως καὶ προηγουμένως, ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τραπέζιον ΒΦ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ρ, ὅτι τὸ τραπέζιον ΘΕ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Χ, ἐν ᾧ τὸ τραπέζιον ΖΦ εἶναι μικρότερον ταύτης, ὅτι τὸ τραπέζιον ΜΗ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ψ, ἐν ᾧ τὸ τραπέζιον ΗΘ εἶναι μικρότερον ταύτης, ὅτι τὸ τραπέζιον ΝΙ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ω, ἐν ᾧ τὸ τραπέζιον ΠΙ εἶναι μικρότερον ταύτης, καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον ΞΙΓ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Δ, ἐν ᾧ τὸ τρίγωνον ΓΙΟ εἶναι μικρότερον ταύτης. διότι τοῦτο εἶναι φανερόν.

ις'.

Ἔστω πάλι τὸ παραβολικὸν τμήμα ΒΘΓ καὶ ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἔστω δὲ ἡ ἐπιφάνεια $Z = \frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. λέγω ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ. ἐὰν τὸ παραβολικὸν τμήμα δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ταύτης· ἔστω πρῶτον, ὅτι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον. ἡ διαφορὰ τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμήμα ΒΘΓ, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν (ἔστω ν) γίνεται μεγαλύτερα τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. εἶναι δὲ δυνατόν, νὰ ληφθῇ ἐπιφάνεια μικροτέρα τῆς διαφορᾶς (τοῦ παρα-

τέμνονται δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἡ ΓΑ ἐπιφανούσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνονται τὰν τομάν αἱ εὐθεῖαι, ἄχθωσαν παρὰ τὰν διαμέτρων αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν ΒΔ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν τι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ἢ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ Ζ χωρίου, δηλόν, ὡς τὰ συναμφοτέρα τό τε Ζ χωρίον καὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμήματος. καὶ τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζια ἐντι, δι' ὧν ἡ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ ΓΟΣ τρίγωνον· τὸ μὲν γὰρ ΜΕ τραπέζιον κοι-



νόν, τὸ δὲ ΜΛ ἴσον τῷ ΦΛ καὶ τὸ ΛΕ ἴσον τῷ ΘΡ καὶ τὸ ΧΕ ἴσον τῷ ΟΘ καὶ τὸ ΓΧΠ τρίγωνον τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ τὸ δὴ Ζ χωρίον ἐλασσόν ἐστι τῶν τραπέζιων τῶν ΜΛ, ΕΡ, ΠΘ καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου. καὶ ἐστὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ χωρίου· τὸ δὲ ΒΔΓ ἐλασσόν ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τῶν ΜΛ, ΕΡ, ΘΠ τραπέζιων καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μείζον ἐὶν ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μείζον ἐστὶ τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ Ζ χωρίου.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἄρα ἡ ὑπεροχά, ἢ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾶ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. δυνατόν δὲ ἐστὶ λαβεῖν χωρίον ἐλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω οὖν τὸ

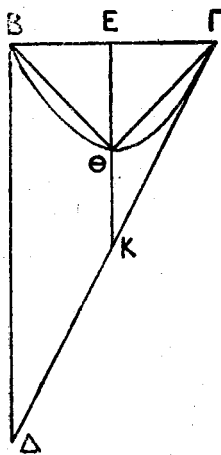
ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ἢ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμήματος, τὸ ΒΕΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμήμα ἀμφοτέρα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Ζ ἐστὶν δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον ἐλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου· ἐστὶν γὰρ τὸ ΒΔΓ τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἐλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη· ἔλασσον ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμήμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος ἔλασσον εἶη καὶ τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὶν τὸ ΒΕΓ τρίγωνον τοῖς τραπέζιοις τοῖς ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ, ἃ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ Ζ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζον· ἴσον ἄρα τὸ τμήμα τῷ Ζ χωρίῳ.

βολικοῦ τμήματος ΒΘΓ μείον. ἐπιφ. Ζ) ἡ ὁποία νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. ἔστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, μικρότερον τῆς εἰρημένης διαφορᾶς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ· ἡ δὲ ΒΕ νὰ εἶναι πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΔ. ἄς διαιρεθῇ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἰς τμήματα κατὰ τὰ σημεῖα Η, Ι, Κ καὶ ἄς ἐνωθῇ τὸ σημεῖον Γ μετὰ τὰ σημεῖα ταῦτα. αἱ ἐνοῦσαι τὰ σημεῖα ταῦτα εὐθείαι θὰ τέμνουν τὴν παραβολὴν (ΒΘΓ) ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ· ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ τῶν τομῶν τῆς παραβολῆς, ἄς ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· θὰ εἶναι δὲ αὗται καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμήμα ΒΘΓ, εἶναι πρόδηλον, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας Ζ καὶ τοῦ τριγώνου ΒΓΕ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. τὰ τραπέζια τὰ ὀριζόμενα ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῶν τεμνουσῶν εὐθειῶν ἦτοι τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΟΣ, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ· διότι τὸ μὲν τραπέζιον ΜΕ εἶναι κοινόν, τὸ δὲ τραπ. ΜΛ = τραπ. ΦΛ, τὸ τραπ. ΛΞ = τραπ. ΘΡ, τὸ τραπ. ΧΞ = τραπ. ΟΘ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΧΠ = τρίγ. ΓΟΣ· ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροίσματος τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ. τὸ δὲ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἄθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ. ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου ἄθροίσματος (τῶν εἰρημένων τραπεζίων καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ). τὸ παραβολικὸν λοιπὸν τμήμα ΒΘΓ δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ζ.

λέγω ὅμως, ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον. διότι ἄς δεχθῶμεν, ὅτι εἶναι μικρότερον. πάλι, ἡ διαφορὰ τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμήμα ΒΘΓ, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν (ἔστω ν), γίνεται μεγαλύτερα τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. εἶναι δὲ δυνατόν νὰ ληφθῇ ἐπιφάνεια, μικροτέρα τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία (ἐπιφ.) νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. ἔστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ μικρότερον τῆς διαφορᾶς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ, ἡ δὲ λοιπὴ κατασκευὴ νὰ γίνῃ ὅπως προηγουμένως. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμήμα ΒΘΓ, τὸ τρίγωνον ΒΕΓ καὶ τὸ παραβολικὸν τμήμα (ὁμοῦ) θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ἐπιφανείας Ζ. εἶναι δὲ ἡ ἐπιφάνεια Ζ μικροτέρα (τοῦ ἄθροίσματος) τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ, καὶ τοῦ τριγώνου ΓΠΣ· διότι τὸ μὲν τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ, μικρότερον δὲ τοῦ τριπλασίου ἄθροίσματος τῶν εἰρημένων ἐπιφανειῶν (τῶν τετραπλεύρων καὶ τοῦ τριγώνου ΓΠΣ), ὥς δὲ εἶχθη προηγουμένως· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΕ καὶ τὸ παραβολικὸν

Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον.

ἔστω γὰρ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΒΘΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. ἔπει οὖν



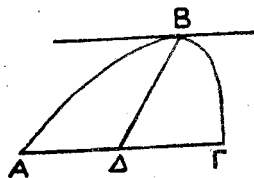
τὸ Θ σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶ τοῦ τμήματος, ἃ ἀπὸ τοῦ Θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα διχατέμνει τὰν ΒΓ, καὶ ἡ ΒΓ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τὰς τομᾶς κατὰ τὸ Θ. ἄχθω δὲ ἡ ΕΘ παρὰ τὰν διάμετρον, ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ. ἔπει οὖν ἡ μὲν ΚΘ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστίν, ἡ δὲ ΓΔ ἐπιψαύουσα τὰς τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΕΓ παράλληλός ἐστι τῇ ἐπιψαύουσᾳ τὰς τομᾶς κατὰ τὸ Θ, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. ἔπει δὲ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ μὲν ΒΘΓ τμήματος τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΒΘΓ τριγώνου τετραπλάσιον, δηλον, ὥς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμήμα τοῦ ΒΘΓ

τριγώνου. Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὴν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὴν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφάν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἡ μέγιστα κάθετος ἄγεται.

ιη'.

Εἴ κα ἐν τμήματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τὰς βάσιος ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἔσσειται τοῦ τμήματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἡ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὴν τοῦ κώνου τομάν.

ἔστω γὰρ τμήμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τὰς ΑΓ ἀχθῶ ἡ ΔΒ παρὰ τὰν διάμετρον. ἔπει οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ κώνῳ τομᾷ ἡ ΒΔ ἄκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΔ, ΑΓ, δηλον, ὥς παραλλήλοι ἐντὶ ἃ τε ΑΓ καὶ ἡ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερόν οὖν, ὅτι τὰν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὴν ΑΓ ἀγομενᾶν καθέτων μέγιστα ἔσσειται ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένα· κορυφὰ οὖν ἐστὶν τοῦ τμήματος τὸ Β σαμεῖον.



τμήμα ΒΘΓ (όμοιο) είναι μικρότερα τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ, καὶ τοῦ τριγώνου ΓΠΣ· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀμφοτέρω τὰ μέλη (τῆς ἀνισότητος) τὸ κοινὸν τμήμα (τὸ παραβολικόν) τότε τὸ τρίγωνον ΓΒΕ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν ὑπολειπομένων ἐπιφανειῶν· τὸ ὁποῖον ὅμως εἶναι ἀδύνατον· διότι ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα, τῶν τραπεζῶν ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τοῦ τριγώνου ΓΟΣ, ὅπερ ἄθροισμα, εἶναι μεγαλύτερον τῶν ὑπολειπομένων ἐπιφανειῶν. Ἄρα τὸ παραβολικόν τμήμα ΒΘΓ δὲν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Ζ· ἀπεδείχθη δὲ ὅτι οὔτε μεγαλύτερον εἶναι· ἄρα τὸ παραβολικόν τμήμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ.

ιζ'.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀποδείξεως ταύτης, εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶν παραβολικόν τμήμα εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ παραβολικόν τμήμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό.

διότι ἔστω τὸ παραβολικόν τμήμα μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Θ καὶ ὡς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΒΘΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικόν τμήμα. ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Θ εἶναι κορυφὴ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Θ. ὡς ἀχθῇ δὲ ἡ ΕΘ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΔ ἐπίσης παράλληλος πρὸς ταύτην, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΚΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἡ δὲ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἡ δὲ ΕΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Θ, τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου ΒΘΓ. (ἐκ τῶν προτάσεων τούτων εἶναι $E\Theta = \frac{1}{2} EK$ κατὰ τὸ β'. θεώρημα καὶ $E\Theta = \frac{1}{2} BD$, ἄρα $E\Theta = \frac{1}{4} BD$) ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον μὲν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ΒΘΓ, τετραπλάσιον δὲ τοῦ τριγώνου ΒΘΓ, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ παραβολικόν τμήμα ΒΘΓ εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ τριγώνου ΒΘΓ.

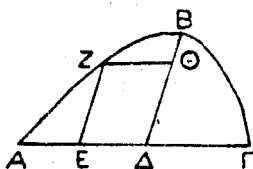
τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας καὶ καμπύλης γραμμῆς, τὴν μὲν εὐθεῖαν καλῶ βάσιν ὕψος δὲ τὴν μεγίστην κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς καμπύλης ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποῖου ἄγεται ἡ μεγίστη κάθετος.

ιη'. (γεωμετρικὴ ἀπόδειξις)

Ἐὰν εἰς τμήμα, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ εὐθείας καὶ παρα-

Ἐν τμήματι περιεχομένῳ ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἅ ἀπὸ μέσας τὰς βάσεις ἀχθεῖσα τὰς ἀπὸ μέσας τὰς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἔσσειται μάκει.

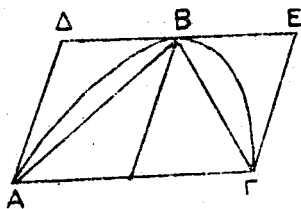
Ἐστω γὰρ τὸ $AB\Gamma$ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἡ μὲν BD ἀπὸ μέσας τὰς AG , ἡ δὲ EZ ἀπὸ μέσας τὰς AD , ἄχθω δὲ καὶ ἡ $Z\Theta$ παρὰ AG . Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἡ BD παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται, καὶ αἱ AD , $Z\Theta$ παρὰ τὰν κατὰ τὸ B ἐπιψαύουσάν ἐντι, δηλόν, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ BD ποτὶ τὰν $B\Theta$ μάκει, ὅν ἡ AD ποτὶ τὰν $Z\Theta$ δυνάμει τετραπλασία ἄρα ἔστιν καὶ ἡ BD τὰς $B\Theta$ μάκει. φανερόν οὖν, ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἡ BD τὰς EZ μάκει.



κ'.

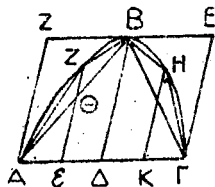
Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μείζον ἔσσειται τὸ ἐγγραφέν τρίγωνον ἢ ἡμισυ τοῦ τμήματος.

Ἐστω γὰρ τὸ $AB\Gamma$ τμήμα, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμήματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἀναγκαῖον, τὸ B σαρμεῖον κορυφὴν εἶμεν τοῦ τμήματος· παράλληλος ἄρα ἔστιν ἡ AG τῇ κατὰ τὸ B ἐπιψαύουσᾳ τὰς τομᾶς. ἄχθω ἡ ΔE διὰ τοῦ B παρὰ τὰν AG καὶ ἀπὸ τῶν A , Γ αἱ AD , ΓE παρὰ τὰν διάμετρον πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμήματος. Ἐπεὶ οὖν ἡμισύ ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $A\Delta E\Gamma$ παραλληλογράμμου, φανερόν, ὅτι μείζον ἐστιν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ τμήματος.



Π ό ρ ι σ μ α

Δεδειγμένον δὲ τούτου δηλόν, ὅτι ὡς ἐς τοῦτο τὸ τμήμα δυνατόν ἐστι πολὺγωνον ἐγγράφαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἀφαιρουμένου γὰρ δεῖ μείζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι ἐλασσοῦντες δεῖ τὰ λειπόμενα τμήματα ποιήσομες ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.



κα'.

Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου το-

βολῆς ἀχθῇ ἐκ τοῦ μέσου τῆς βάσεως παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, θὰ εἶναι κορυφή τοῦ τμήματος τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς τέμνει τὴν παραβολήν.

διότι ἔστω τὸ τμήμα $AB\Gamma$ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς καὶ ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς $A\Gamma$ ἡ ΔB παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ $B\Delta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς καὶ $A\Delta = \Delta\Gamma$, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ $A\Gamma$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον B εἶναι παράλληλοι. ὁμοίως εἶναι φανεράν, ὅτι ἐκ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς παραβολῆς ἐπὶ τὴν $A\Gamma$ ἡ μεγαλύτερα θὰ εἶναι ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ B · εἶναι λοιπὸν τοῦτο κορυφή τοῦ τμήματος.

ιθ'.

Εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς βάσεως εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς εὐθείας (τῆς παραλλήλου) τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως· (μέχρι τῆς παραβολῆς)· διότι ἔστω τὸ τμήμα $AB\Gamma$ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ μέσου τῆς $A\Gamma$ ἡ $B\Delta$ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἡ δὲ EZ ἐκ τοῦ μέσου τῆς $A\Delta$ (παράλ. πρὸς τὴν ΔB), ἄς ἀχθῇ δὲ ἡ $Z\Theta$ παράλληλος πρὸς τὴν $A\Gamma$. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ $B\Delta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς καὶ $A\Delta$, $Z\Theta$ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον B εἶναι φανερόν ὅτι ὑπάρχει ἡ σχέσις $B\Delta : B\Theta = (A\Delta)^2 : (Z\Theta)^2$. ἄρα ἡ $B\Delta$ εἶναι τετραπλασία τῆς $B\Theta$ · συνεπῶς ἡ $B\Delta$ εἶναι $\frac{4}{3}$ EZ .

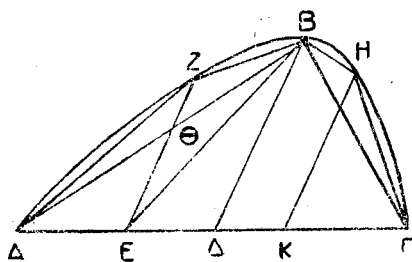
κ'.

Ἐάν εἰς παραβολικὸν τμήμα ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον βάσιν καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ μὲ τὸ παραβ. τμήμα, τὸ ἐγγράφεν τρίγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

ἔστω τὸ παραβολικὸν τμήμα $AB\Gamma$ καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμήμα. ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμήμα, τὸ σημεῖον B εἶναι κορυφή τοῦ παραβολικοῦ τμήματος· ἄρα ἡ $A\Gamma$ εἶναι παράλληλος τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον B . ἄς ἀχθῇ δὲ διὰ τοῦ B ἡ παράλληλος πρὸς τὴν $A\Gamma$ καὶ ἀπὸ τῶν σημείων A, Γ αἱ $A\Delta, \Gamma E$, παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς· αὗται θὰ εἶναι ἐκτός τοῦ παραβολικοῦ τμήματος· ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, εἶναι τὸ ἡμισυ

μᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα ἐς τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμημάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἔσσειται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμήμα ἐγγραφέν.

ἔστω τὸ $AB\Gamma$ τμήμα, οἷον εἴρηται καὶ τειμάσθω ἅ AG δίχα τῷ Δ , ἅ δὲ BA ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον τὸ B ἄρα σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶν τοῦ τμήματος. τὸ ἄρα $AB\Gamma$ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμήματι καὶ



ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τειμάσθω δίχα ἅ AD τῷ E , καὶ ἄχθω ἅ EZ παρὰ τὰν διάμετρον, τειμάσθω δὲ ἅ AB κατὰ τὸ Θ τὸ ἄρα Z σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶ τοῦ τμήματος τοῦ AZB . τὸ δὴ AZB τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ $[AZB]$ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον, ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$

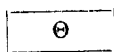
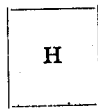
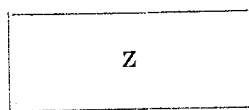
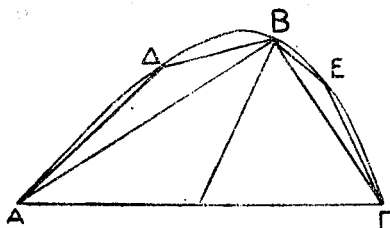
τρίγωνον τοῦ AZB τριγώνου.

ἔστιν οὖν ἅ BA τᾶς μὲν EZ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ $E\Theta$ διπλασία· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἅ $E\Theta$ τᾶς ΘZ . ὥστε καὶ τὸ AEB τρίγωνον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ ZBA · τὸ μὲν γὰρ AEB διπλάσιον ἐστὶ τοῦ $A\Theta Z$, τὸ δὲ ΘBE τοῦ $Z\Theta B$. ὥστε τὸ $AB\Gamma$ τοῦ AZB ἐστὶν ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ $BH\Gamma$ τμήμα ἐγγραφέντος.

κβ'.

Εἴ καὶ τὴν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέντι ἐξῆς ὅποσαοὺν ἐν τῷ τετραπλάσιονι λόγῳ, ἢ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἔσσειται τοῦ τμήματος.

ἔστω γὰρ τμήμα τὸ $AAB\Gamma$ περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθο-



γωνίου κώνου τομᾶς, χωρία δὲ ἔστω ὅποσαοὺν ἐξῆς κείμενα τὰ Z, H, Θ, I , τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἀγούμενον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Z , καὶ ἔστω τὸ Z ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τὸ τμήμα τῶν Z, H, Θ, I χωρίων μειζόν ἐστίν.

τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔΕΓ, εἶναι φανερόν ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

Π ό ρ ι σ μ α

Σύμφωνα με τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν, εἶναι φανερόν ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ ἐγγράφεται πολύγωνον εἰς παραβολικόν τμήμα, οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολειπομένων παραβολικῶν τμημάτων νὰ εἶναι μικρότερον πάσης δοθείσης ἐπιφανείας (ὅσονδήποτε μικρᾶς)· διότι ἐάν πάντοτε ἀφαιροῦμεν ἀπὸ κάθε παραβολικόν τμήμα (ποῦ ὑπολείπεται) περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐλαττοῦντες διαρκῶς τὰ ὑπολειπόμενα τμήματα, θὰ καθιστῶμεν αὐτὰ μικρότερα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας (ὅσονδήποτε μικρᾶς).

κα΄

Ἐάν εἰς παραβολικόν τμήμα ἐγγραφῇ τρίγωνον, ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τὸ παραβολικόν τμήμα, εἰς δὲ τὰ οὕτω ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα ἐγγραφῶσι τρίγωνα, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τὰ παραβολικὰ τμήματα, τότε τὸ ἀρχικῶς ἐγγραφέν τρίγωνον θὰ εἶναι ὀκταπλάσιον ἐκάστου τῶν τριγώνων τῶν ἐγγραφέντων εἰς τὰ ὑπολειφθέντα παραβολικὰ τμήματα.

Ἐστω τὸ παραβολικόν τμήμα ΑΒΓ καὶ ἄς ληθῇ $ΑΔ=ΔΓ$, ἢ δὲ ΒΔ ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς· τότε τὸ σημεῖον Β θὰ εἶναι ἡ κορυφή τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸ παραβολικόν τμήμα. ἄς ληθῇ πάλι $ΑΕ=ΕΔ$ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Θ· ἄρα τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κορυφή τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ΑΖΒ. τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΖΒ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τὸ παραβολικόν τμήμα ΑΖΒ. Δέον ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΖΒ.

$$\text{ἢ } ΒΔ = \frac{4}{3}ΕΖ \text{ καὶ } ΒΔ = 2ΕΘ. \text{ ἄρα } ΕΘ = 2ΘΖ.$$

ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΕΒ = 2 τριγ. ΖΒΑ· διότι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΕΘ = 2 τριγ. ΑΘΖ, τὸ δὲ τριγ. ΘΒΕ = 2 τριγ. ΖΘΒ. ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ΑΖΒ. ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου τοῦ ἐγγραφέντος εἰς τὸ παραβολικόν τμήμα ΒΗΓ.

κβ΄.

Ἐάν εἰσθῇ παραβολικόν τμήμα καὶ ὅσαιδήποτε ἐπιφάνειαι ἔχουσαι λόγον τετραπλάσιον, ἢ προηγουμένη τῆς ἐπομένης (ἀποτελοῦσαι γεωμετρικὴν πρόοδον μετὰ λόγον $\frac{1}{4}$), νὰ εἶναι δὲ ἡ μεγαλύτερα τῶν

ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κορυφὰ τὸ Β, τῶν δὲ περιλειπομένων τμημάτων τὰ Δ, Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, δηλόν, ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστὶ τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Ζ χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ Η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμημάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ τῷ Θ καὶ τὰ ἐς τὰ ὕστερον γενόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ Ι χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμήμα. φανερόν οὖν, ὅτι ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ τμήματος.

κγ'.

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἐξῆς ἐν τῷ τετραπλάσιονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

ἔστω οὖν ὅποσαοῦν μεγέθεα ἐξῆς καίμενα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε τετραπλα-



σίονα ἕκαστον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Α, ἔστω δὲ τὸ μὲν Ζ τρίτον τοῦ Β, τὸ δὲ Η τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ Ι τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ζ τοῦ Β τρίτον μέρος ἐστίν, τὸ δὲ Β τοῦ Α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφοτέρω τὰ Β, Ζ μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ Α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Η, Γ τοῦ Β καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ Ι, Ε τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ. ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ Ζ, Η, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν Β, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ Α. δηλόν οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ τὸ Ι, τοῦτέστι τὸ τρίτον τὸ Ε, τοῦ Α ἐστὶν ἐπίτριτα.

κδ'.

Πᾶν τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΔΒΞΓ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ Κ χωρίον. δε

ἐπιφανειῶν, ἴση πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμήμα, τότε ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι θὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. διότι, ἔστω τὸ παραβολικὸν τμήμα $ΑΔΒΕΓ$ καὶ ἐπιφάνειαι ὅσαιδήποτε ἀποτελοῦσαι πρόοδον, (φθίνουσιν) αἱ Z, H, Θ, I , νὰ εἶναι δὲ ἡ προηγουμένη ἐπιφάνεια τετραπλάσια τῆς ἐπομένης καὶ μεγίστη ἔστω ἡ ἐπιφάνεια Z , ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἴση κατὰ τὸ ἐμβαδόν, μὲ τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμήμα. λέγω ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄθροισματος τῶν ἐπιφανειῶν Z, H, Θ, I .

ἔστω κορυφὴ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος τὸ B , τῶν δὲ ὑπολειπομένων παραβολ. τμημάτων (μετὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$) ἔστωσαν κορυφαὶ τὰ Δ, E . ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ εἶναι ὀκταπλάσιον ἐκάστου τῶν τριγώνων $ΑΔΒ, ΒΕΓ$, εἶναι φανερόν ὅτι τοῦ ἄθροισματος τούτων εἶναι τετραπλάσιον. καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν Z , ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων $ΑΔΒ, ΒΕΓ =$ ἐπιφάνεια H .

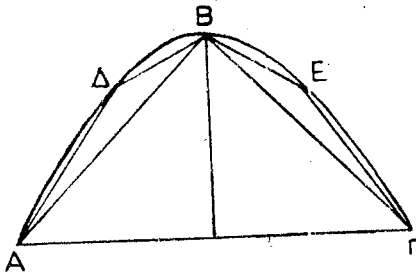
ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς τὰ ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ ταῦτα, εἶναι ἴσα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Θ , ἐπίσης δὲ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς τὰ νέα ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα, εἶναι ἴσα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν I . ἄρα ὅλαι αἱ οὕτω πῶς ληφθεῖσαι ἐπιφάνειαι ἰσοῦνται μὲ πολύγωνον ἐγγραφέν εἰς τὸ παραβολικὸν τμήμα. εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι μικρότερον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

κγ'.

Ἐάν ληφθῶσι μεγέθη (κατὰ φθίνουσιν γεωμετρικὴν πρόοδον) μὲ λόγον $\frac{1}{4}$, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς προόδου ταύτης σὺν $\frac{1}{9}$ τοῦ μικροτέρου ὄρου, θὰ ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὄρου.

ἔστω, ὅσαιδήποτε μεγέθη κατὰ φθίνουσιν γεωμ. πρόοδον, τὰ A, B, Γ, Δ, E , μὲ λόγον $\frac{1}{4}$ καὶ μέγιστον τούτων τὸ A , ἃς εἶναι δὲ τὸ μέγεθος $Z = \frac{1}{9} B$, τὸ $H = \frac{1}{9} \Gamma$, τὸ $\Theta = \frac{1}{9} \Delta$, καὶ τὸ $I = \frac{1}{9} E$. ἐπειδὴ λοιπὸν $Z = \frac{1}{9} B$ καὶ $B = \frac{1}{4} A$, ἔπεται ὅτι $B + Z = \frac{1}{3} A$. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι $H + \Gamma = \frac{1}{9} B$, $\Theta + \Delta = \frac{1}{9} \Gamma$, καὶ $I + E = \frac{1}{9} \Delta$. συνεπῶς (διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν τελευταίων ἰσοτήτων) θὰ εἶναι $B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \frac{1}{9} (A + B + \Gamma + \Delta)$. εἶναι ὁμῶς $Z + H + \Theta = \frac{1}{9} (B + \Gamma + \Delta)$. ἄρα $B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{1}{9} A$. φανερόν εἶναι λοιπὸν ὅτι (διὰ προσθέσεως τοῦ A εἰς ἀμφότε. τὰ μέλη) $A + B + \Gamma + \Delta + E + I = A + \frac{1}{9} A = \frac{10}{9} A$.

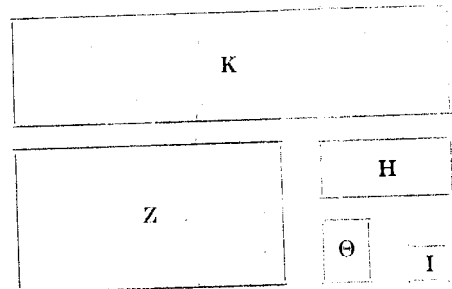
κτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ $\Lambda\Delta\text{ΒΕΓ}$ τμήματι. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἦτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζον τὸ $\Lambda\Delta\text{ΒΕΓ}$ τμήμα τοῦ Κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ $\Lambda\Delta\text{Β}$, ΒΕΓ τρίγωνα, ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δὲ



καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμημάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ αἰ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμημάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχᾶς, ἣ

ὑπερέχει τὸ $\Lambda\Delta\text{ΒΕΓ}$ τμήμα τοῦ Κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολυγώνον μείζον ἐσσεῖται τοῦ Κ · ὕπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ἐξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλάσιον λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν $\Lambda\Delta\text{Β}$, ΒΕΓ τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἐπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων καὶ αἰ οὕτω, δηλόν, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ Κ ἐπίτριτον ἐστὶ τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶν μείζον τὸ $\Lambda\Delta\text{ΒΕΓ}$ τμήμα τοῦ Κ χωρίου.

ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ Ζ , τοῦ δὲ Ζ τέταρτον τὸ Η , καὶ ὁμοίως τοῦ Η τὸ Θ , καὶ αἰ ἐξῆς τιθέσθω, ἕως καὶ γένηται τὸ ἔσχατον ἔλασσον τῆς ὑπεροχᾶς, ἣ ὑπερέχει τὸ Κ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ Ι · ἐστὶν δὴ τὰ Ζ , Η , Θ , Ι χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ Ι ἐπίτριτα τοῦ Ζ . ἐστὶν δὲ καὶ τὸ Κ τοῦ Ζ ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ Κ τοῖς Ζ , Η , Θ , Ι καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ Ι . ἐπεὶ οὖν τὸ Κ χωρίον τῶν μὲν Ζ , Η , Θ , Ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ Ι , τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ Ι , δηλόν, ὡς μείζονά ἐντι τὰ Ζ , Η , Θ , Ι χωρία τοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γάρ, ὅτι, ἐάν ἢ ὅποσαοῦν χωρία ἐξῆς κείμενα ἐν τετραπλάσιον λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ἢ τῷ εἰς τὸ τμήμα ἐγγραφόμενῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα τὸ $\Lambda\Delta\text{ΒΕΓ}$ τμήμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Κ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ Κ . τὸ δὲ Κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ · καὶ τὸ $\Lambda\Delta\text{ΒΕΓ}$ ἄρα τμήμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.



Πάν παραβολικὸν τμήμα εἶναι $\frac{4}{9}$ τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

διότι ἔστω τὸ παραβολικὸν τμήμα ΑΔΒΕΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἢ δὲ ἐπιφάνεια $K = \frac{4}{9}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. θ' ἀποδείξω, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας Κ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

διότι, ἐάν δὲν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω πρῶτον, ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα ΑΔΒΕΓ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Κ. Ὡς προηγουμένως, ἐγγράφω τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ, κατόπιν δὲ εἰς τὰ ὑπολειπόμενα παραβολικά τμήματα ἐγγράφω ὁμοίως ἀνὰ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ ταῦτα καὶ εἰς τὰ νέα ὑπολειπόμενα παραβολικά τμήματα ἐγγράφω ὁμοίως τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ μὲ ταῦτα. (ἐάν οὕτω προχωρήσω ἐγγράφων εἰς τὰ ὑπολειπόμενα παραβολικά τμήματα τρίγωνα) τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολειπομένων παραβολικῶν τμημάτων θὰ εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς παραβολικοῦ τμήματος μείον ἐπιφανείας Κ. Ὡστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Κ· ὅπερ ἀδύνατον, διότι, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν ἐπιφάνειαι σχηματιζόμεναι κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον $= \frac{1}{4}$ καὶ πρῶτον ὅρον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον (τοῦ ἄθροίσματος) τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΕΓ, ἔπειτα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων τούτων (ΑΔΒ, ΒΕΓ) εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἄθροίσματος, τῶν εἰς τὰ ὑπόλοιπα παραβολικά τμήματα ἐγγραφομένων τριγώνων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μεγαλυτέρας τῶν ἐπιφανειῶν (κατὰ τὴν § κγ'), ἢ δὲ ἐπιφάνεια Κ, εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μεγαλυτέρας ἐπιφανείας (τοῦ τριγ. ΑΒΓ). ἄρα τὸ παραβολικὸν τμήμα δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Κ.

ἔστω τώρα, ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Κ. ἂς εἶναι δὲ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, ἢ δὲ ἐπιφάνεια Η ἂς εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{4}$ Ζ, ὁμοίως δὲ ἢ ἐπιφάνεια $\Theta = \frac{1}{4}$ Η καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου, ἢ οὕτω πως ληφθησομένη τελευταία ἐπιφάνεια εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ἐπιφανείας Κ—παραβολικοῦ τμήματος καὶ ἔστω ἡ τελευταία μικροτέρα ἐπιφάνεια Ι· εἶναι ὁμῶς τὸ ἄθροισμα, τῶν ἐπιφανειῶν Ζ, Η, Θ, Ι καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ Ι $= \frac{4}{9}$ Ζ. εἶναι δὲ καὶ ἢ ἐπιφάνεια $K = \frac{4}{9}$ Ζ (ἀφοῦ Ζ = τρίγ. ΑΒΓ)· ἄρα ἢ ἐπιφάνεια $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{9} I$. ἐπειδὴ λοιπὸν ἢ ἐπιφάνεια $K - (Z + H + \Theta + I) < I$ καὶ Κ—παραβολ. τμήμα $> I$, (ἐξ ὑποθέσεως) εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν Ζ, Η, Θ, Ι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ

100
100

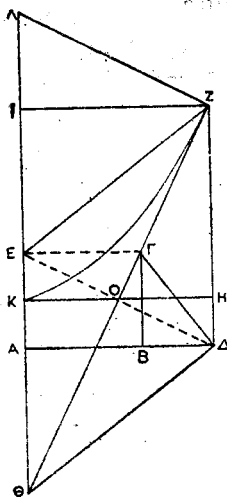
100
100

100

παραβολικοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον. διότι ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ἐάν δοθῶσιν ἐπιφάνειαι σχηματίζουσαι φθίνουσιν γεωμετρικὴν πρόοδον με λόγον $\frac{1}{4}$, ἡ δὲ μεγαλύτερα ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ εἰς τὸ παραβολικὸν τμήμα ἐγγραφόμενον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα ὄλων τούτων τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραβολικοῦ τμήματος (§ κβ'). ἄρα τὸ παραβολικὸν τμήμα ΑΔΒΕΓ δὲν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Κ. ἀπεδείχθη δέ, ὅτι οὔτε μεγαλύτερον εἶναι· συνεπῶς εἶναι ἴσον με τὴν ἐπιφάνειαν Κ. ἡ ἐπιφάνεια δὲ Κ εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τρίτου τριγώνου ΑΒΓ. ἄρα τὸ παραβολικὸν τμήμα ΑΔΒΕΓ εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Εἰς τὸ β'. — Εἴστω ἡ ἐστία τῆς παραβολῆς, ΖΘ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Ζ, ἡ ΙΖ ἔχει ἀχθῆ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς ΚΗ καὶ ἡ ΖΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΗ. ἡ ΑΔ ἔστω ἡ διευθύνουσα τῆς παραβολῆς. ἡ ΖΕ = ΖΔ κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς παραβολῆς, ἡ ΗΔ = ΕΚ ἐπειδὴ ΗΔ = ΚΑ ἡ ὁποία κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς παραβολῆς = ΕΚ. ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΕΟΚ καὶ ΗΟΔ ἔπεται ΟΚ = ΟΗ. τὰ τρίγωνα ΟΚΘ καὶ ΟΖΗ εἶναι ἴσα. συνεπῶς ΖΗ = ΚΘ καὶ ἐπειδὴ ΖΗ = ΙΚ ἔπεται ΙΚ = ΚΘ.



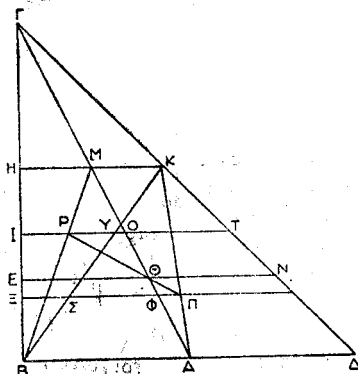
Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΕΟΚ, ΗΟΔ ἔπεται ΕΟ = ΟΔ. ἄρα ἡ ΖΘ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν ΕΔ, βάσιν τοῦ ἰσοσκ. τριγ. ΕΖΔ. ἡ ΓΒ ἀγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, εἶναι δὲ μικροτέρα τῆς ΓΔ ὑποτεινούσης τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, ἄρα μικροτέρα τῆς ΓΕ. συνεπῶς τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἐκτὸς τῆς παραβολῆς. τὸ ἴδιον ἰσχύει δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς παραβολῆς, πλην τοῦ σημείου Ζ. ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

Εἰς τὸ γ'. — Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν Β παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ λαμβάνομεν τμήμα ΒΗ, (ἐλλείπει ἀπὸ τὸ σχῆμα) ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΒΗ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΖ×ΒΗ. Τότε ὑπάρχει ἡ σχέσις ΒΔ×ΒΗ : ΒΖ×ΒΗ = ΒΔ : ΒΖ. συνεπῶς (ΑΔ)² : (ΕΖ)² = ΒΔ : ΒΖ. (κ'. θεώρημα τοῦ α'. βιβλ. τῶν κωνικῶν τομῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, στερεοτ. ἔκδοσις, σελὶς 72).

Εἰς τὸ δ'. — Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΔΓ, ΒΚΙ ἔπεται ΒΔ : ΒΚ = ΒΓ : ΒΙ. ἐπειδὴ δὲ ΒΔ : ΒΚ = (ΔΓ)² : (ΚΗ)², λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ = (ΔΓ)² : (ΚΗ)². (1). ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΓ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΒΔ εἰς τι σημεῖον Λ. (ἡ ΘΛ λείπει ἀπὸ τὸ σχῆμα). ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΓΒ καὶ ΛΘΒ λαμβάνομεν ΔΓ : ΛΘ = ΒΓ : ΒΘ. ἡ ΔΓ : ΚΗ = ΒΓ : ΒΘ. ἐὰν εἰς τὴν (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸν λόγον ΔΓ : ΚΗ μὲ τὸν ἴσον τοῦ ΒΓ : ΒΘ λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ = (ΒΓ)² : (ΒΘ)². ἐκ ταύτης ἔχομεν ΒΓ. (ΒΘ)² = ΒΙ. (ΒΓ)² ἢ (ΒΘ)² = ΒΙ. ΒΓ ἢ ΒΓ : ΒΘ = ΒΘ : ΒΙ (2) ἥτοι ἡ ΒΘ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΒΓ, ΒΙ. ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΘ = (ΒΓ - ΒΘ) : (ΒΘ - ΒΙ) ἥτοι ΒΓ : ΒΘ = ΓΘ : ΕΙ.

Εἰς τὸ ι'. Ἐστω τὸ δοθὲν τραπέζιον ΒΗΚΔ. διὰ προεκτάσεως τῶν ΒΗ, ΔΚ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΓΔ. ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμεσον ΓΑ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου κεῖται ἐπὶ ταύτης. τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΗΚ κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΒΜ, καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΚΔ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΚΑ. χωρίζομεν τὴν ΒΗ εἰς τρία ἴσα μέρη διὰ τῶν σημείων Ξ, Ι καὶ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΔ. τότε τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΗΚ εἶναι τὸ Ρ καὶ τοῦ τριγώνου ΒΚΔ τὸ Π. τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπέζιου κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΜ. ἐπίσης ὁμοίως κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΡ ποῦ ἐνώνει τὰ δύο κέντρα βαρῶν τῶν τριγώνων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ

τραπέζιον, συνεπὼς εἶναι τὸ Θ. ἀλλὰ τρίγ. ΒΚΔ : τρίγ. ΗΒΚ = ΘΡ : ΘΠ (διότι τὰ βάρη τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς μοχλοβραχίονας). ἐπίσης τρίγ. ΒΚΔ : τρίγ. ΗΒΚ = ΒΔ : ΗΚ (διότι τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰ αὐτὰ ὕψη). ἀπὸ τὸ σχῆμα ὁμῶς λαμβάνομεν ΘΡ : ΘΠ = ΘΟ : ΘΦ. συνεπὼς ΒΔ : ΗΚ = ΘΟ : ΘΦ. Ἄρα $(2ΒΔ + ΗΚ) : (2ΗΚ + ΒΔ) = (2ΘΟ + ΘΦ) : (2ΘΦ + ΘΟ)$. ἀλλὰ $2ΘΟ + ΘΦ = ΟΦ + ΟΘ = ΟΜ + ΟΘ = ΘΜ$ καὶ $2ΘΦ + ΘΟ = ΟΦ + ΘΦ = ΑΦ + ΘΦ = ΑΘ$. συνεπὼς $(2ΒΔ + ΗΚ) : (2ΗΚ + ΒΔ) = ΘΜ : ΑΘ$. ἀλλὰ ΘΜ : ΑΘ = ΕΗ : ΒΕ καὶ ἡ σχέσις ἀπεδείχθη. (κατὰ τὸ ιε' θεώρημα τῶν ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I τοῦ Ἀρχιμήδους).



Εἰς τὸ ιδ'. — Ὡς γνωστὸν ἀπὸ τοῦ α' βιβλίου περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν τὸ κέντρον βάρους τριγώνου εὐρίσκεται ἂν φέρωμεν τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου. τοῦτο ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσον κάθε πλευρᾶς $\frac{1}{3}$ τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου τούτου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς. ἂν ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΔΓ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΔ αὕτη τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν ΒΔ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ΒΓ. συνεπὼς διὰ νὰ ὑπάρχη εἰς τὸ σύστημα ἰσορροπία θὰ ἔχωμεν $ΑΒ \times \text{ἄθροισμα ἐξηρημένων ἐπιφανειῶν εἰς τὸ σημεῖον Α} = \frac{1}{3} ΒΓ \times \text{τρίγωνον ΒΔΓ}$. ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄθροισματος τῶν ἐξηρημένων ἐπιφανειῶν εἰς τὸ σημεῖον Α. αἱ ἐπιφάνειαι αὗται εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν τραπεζίων ΚΕ + ΛΖ + ΜΗ + ΝΙ + τρίγ. ΙΞΓ. μεγαλύτεραι δὲ τῶν τραπεζίων ΖΘ + ΘΗ + ΠΙ + τρίγ. ΙΟΓ. ἐὰν τὴν εὐθείαν ΒΓ χωρίσωμεν εἰς ἀπείρως μικρὰ τμήματα ἴσα ἢ ἄνισα, ἡ διαφορὰ τοῦ ἄθροισματος τῶν δευτέρων τραπεζίων ἀπὸ τοῦ ἄθροισμα τῶν πρώτων τείνει πρὸς τὸ μηδέν καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἰσορροποῦσα τὰς ἐπιφάνειάς $P + X + Y + Z + \Delta$ αἱ ὁποιαὶ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι ἡ παραβολή. συνεπὼς ἡ παραβολὴ ΒΘΓ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνάγεται ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδην εἰς τὸ θεωρ. ις' διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς καὶ ὅχι μὲ χρῆσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπειροστοῦ. διὰ τοῦ θεωρήματος ιζ' συνάγεται ἡ διὰ τῶν «μηχανικῶν» ἀπόδειξις ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα εἶναι τὸ $\frac{4}{3}$ τριγώνου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐπίσης διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἀπόδειξις ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὸ ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα ΕΘΓ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

Εἰς τὸ ιθ'. — Ἐπειδὴ $ZΘ = \frac{ΑΔ}{2}$ ἐκ κατασκευῆς, ἡ ἐκ τοῦ γ' θεωρ. λαμβανόμενη σχέσις $ΒΔ : ΒΘ = (ΑΔ)^2 : (ZΘ)^2$ γίνεται $ΒΔ : ΒΘ = (ΑΔ)^2 : \left(\frac{ΑΔ}{2}\right)^2$ ἔξ ἧς

* Ἡ σχέσις $2ΒΔ + ΗΚ : 2ΗΚ + ΒΔ = 2ΘΟ + ΘΦ : 2ΘΦ : ΘΟ$ ἐκ τῆς ἀναλογίας $ΒΔ : ΗΚ = ΘΟ : ΘΦ$ ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. ἡ ἀναλογία $ΒΔ : ΗΚ = ΘΟ : ΘΦ$ γράφεται καὶ $ΒΔ : ΘΟ = ΗΚ : ΘΦ$ (1). αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $2ΒΔ : 2ΘΟ = ΗΚ : ΘΦ$. ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $(2ΒΔ + ΗΚ) : (2ΘΟ + ΘΦ) = ΗΚ : ΘΦ$. (κατὰ τὸ γνωστὸν θεώρημα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν μιᾶς ἀναλογίας διὰ τοῦ ἄθροισματος τῶν παρανομαστῶν ἰσοῦται μὲ ἕκαστον ὅρον τῆς ἀναλογίας). ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν ἐπίσης $2ΗΚ : 2ΘΦ = ΒΔ : ΘΟ$ ἔξ ἧς $(2ΗΚ + ΒΔ) : (2ΘΦ + ΘΟ) = ΒΔ : ΘΟ$. ἀλλὰ $ΒΔ : ΘΟ = ΗΚ : ΘΦ$. συνεπὼς $(2ΗΚ + ΒΔ) : (2ΘΦ + ΘΟ) = (2ΒΔ + ΗΚ) : (2ΘΟ + ΘΦ)$ ἐκ τῆς ὁποίας $(2ΒΔ + ΗΚ) : (2ΗΚ + ΒΔ) = (2ΘΟ + ΘΦ) : (2ΘΦ + ΘΟ)$.

$BD=4B\Theta$ (1). ή $\Delta\Theta=4B\Theta-B\Theta=3B\Theta$ (2). διαιρούντες κατὰ μέλη τὴν (1) διὰ τῆς (2) ἔχομεν $BD:\Delta\Theta=4B\Theta:3B\Theta$, ἐξ ἧς $BD=\frac{4}{3}\Delta\Theta=\frac{4}{3}EZ$.

Εἰς τὸ κα'.— Ἐκ τοῦ ιθ' ἔχομεν ὅτι $BD=\frac{4}{3}EZ$. ή $E\Theta=\frac{1}{2}BD$, ὡς ἀγομένη παραλλήλως πρὸς ταύτην, ἐκ τοῦ μέσου τῆς AD . συνεπῶς $BD=2E\Theta=\frac{4}{3}(E\Theta+\Theta Z)$. ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $E\Theta=2\Theta Z$. τὸ τρίγωνον $AE\Theta$ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου $A\Theta Z$, διότι ἔχει διπλασίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὁμοίως τὸ τρίγωνον $E\Theta B$ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΘZB διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. ὥστε, τὸ τρίγωνον AEB εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου AZB . τὸ τρίγωνον $AEB=$ τρίγ. $E\Theta B$, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. συνεπῶς τὸ τρίγωνον ABD εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου AZB . ἄρα τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ποὺ εἶναι διπλάσιον τοῦ ABD εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου AZB .

Εἰς τὸ κδ'.— ἐάν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου τριγώνου ποὺ ἐγγράφεται εἰς τὸ παραβολικὸν τμήμα εἶναι $=1$, τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων ποὺ ἐγγράφονται εἰς τ' ἀπομένοντα δύο παραβολ. τμήματα θὰ εἶναι $\frac{1}{4}$. τὸ ἐμβαδὸν τῶν 4 τριγώνων ποὺ ἐγγράφονται εἰς τ' ἀπομένοντα 4 παραβ. τμήματα θὰ εἶναι $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}=(\frac{1}{4})^2$. Τὸ ἐμβ. τῶν 8 τριγ. ποὺ ἐγγράφονται εἰς τὰ 8 ἀπομένοντα παρ. τμ. θὰ εἶναι $\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{4})^3$ καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς ἤτοι $(\frac{1}{4})^4, (\frac{1}{4})^5 \dots$ ἐάν συνεχισθῇ ἡ ἐγγραφή τριγώνων ὥστε νὰ ἐγγραφοῦν ὅσαδήποτε τρίγωνα καὶ ἂν ἡ τελευταία ἐγγραφή κληθῇ (ν) δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τῶν τελευταίως ἐγγραφέντων τριγώνων νὰ εἶναι $(\frac{1}{4})^v$ τότε κατὰ τὸ θεώρημα κυ' τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς προόδου, μὲ τοὺς $v+1$ ὄρους σὺν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $v+1$ ὄρου θὰ εἶναι $1+\frac{1}{4}+\dots+(\frac{1}{4})^v+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^v=\frac{4}{3}$. ἀλλὰ ὅλοι οἱ ὄροι τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος πλὴν τοῦ τελευταίου ἀποτελοῦν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ποὺ ἐγγράφομεν συνεχῶς εἰς τὸ παραβολικὸν τμήμα. συνεπῶς εἶναι

$$1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\dots+(\frac{1}{4})^v=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^v$$

ἤτοι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος εἶναι $< \frac{4}{3}$ κατὰ $\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^v$. ἐάν τὸ v τείνῃ πρὸς τὸ ἀπείρον, τότε ὁ ὄρος $\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^v$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν καὶ τὸ πρῶτον μέλος ποὺ εἶναι τότε τὸ παραβολικὸν τμήμα ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$. ἐάν τὸ πρῶτον τρίγωνον ἔχῃ ἐμβαδὸν A τότε τὸ παραβολικὸν τμήμα ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{4}{3}A$.

Ο' Ἀρχιμήδης δὲν κάνει χρῆσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου διὰ νὰ εὕρῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς σειρᾶς $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots$, ἀλλὰ φθάνει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβ. τμήματος εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. λαμβάνει ἐπιφάνειαν $K=\frac{4}{3}$ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου εἰς τὸ παραβολικὸν τμήμα καὶ ἀποδεικνύει ὅτι τὸ παραβολικὸν τμήμα δὲν εἶναι μεγαλύτερον, οὔτε μικρότερον τῆς ἐπιφανείας K . Ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς αὐτὴν ἡ ὁποία εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Δημόκριτος ὁ Ἀβδηρίτης. Ἐζήσα περίπου τὸ 470—380 π.Χ. Διάσημος Φιλόσοφος, Μαθηματικός, Φυσικός, Ἀστρονόμος.—Ἰδρυτὴς τῆς ἀτομικῆς θεωρίας.—Ἀπὸ τὰ ἔργα του ἐσώθησαν μόνον ἀποσπάσματα.

Εὐδοξος. Γεννηθεὶς εἰς τὴν Κνίδον τῆς Καρίας τὸ 410 π.Χ. Μαθηματικός καὶ Ἀστρονόμος. Μαθητὴς τοῦ Πλάτωνος καὶ κατόπιν Καθηγητὴς εἰς τὴν Ἀκαδημίαν. Ἀπέθανε εἰς τὴν Κνίδον τὸ 356 π.Χ. εἰς τῶν διασημοτέρων Μαθηματικῶν καὶ Ἀστρονόμων τῆς ἀρχαιότητος.

Ἀρίσταρχος. Σάμιος. Ἀστρονόμος καὶ Μαθηματικός γεννηθεὶς περίπου τὸ 310 π.Χ., ζήσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ. Τὸ ἔτος τοῦ θανάτου δὲν εἶναι γνωστόν.

Πτολεμαῖος Κλαύδιος. Διάσημος Ἀστρονόμος καὶ Μαθηματικός, ζήσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ τὸν 2ον μ.Χ. αἰῶνα.

Κόνων. Ἐκ Σάμου. Μαθηματικός καὶ Ἀστρονόμος, φίλος τοῦ Ἀρχιμήδους, ζήσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ. Δὲν εἶνε βέβαιον πότε ἐγεννήθη. Ἀπέθανε τὸ 240 π.Χ.

Δοσίθεος. Μαθηματικός ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, φίλος τοῦ Κόνωνος καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Περί τοῦ βίου του δὲν σώζεται τίποτε.

Ἐρατοσθένης. Ἐγεννήθη εἰς τὴν Κυρηναϊκὴν τὸ 276 π.Χ. ἔζησε καὶ ἀπέθανε εἰς τὴν Ἀλεξανδρείαν τὸ 194 κατόπιν ἀπεργίας πείνης. Μαθηματικός καὶ Ἀστρονόμος.

Ζεύξιππος. Σύγχρονος τοῦ Ἀρχιμήδους, Μαθηματικός ἐν Ἀλεξανδρείᾳ.

Πάππος. Μαθηματικός. Ἐγεννήθη καὶ ἔζησεν εἰς τὴν Ἀλεξανδρείαν περί τὸ τέλος τοῦ τρίτου αἰῶνος μ.Χ.

Θέων ὁ Ἀλεξανδρεὺς. Μαθηματικός, ζήσας κατὰ τὸν Δ'. μ.Χ. αἰῶνα.

