مستوى جذع مشترك علوم تمارين : الدوال	إنجاز الاستاذ : محسن الشرفي

تمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

1 – حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2 – أدرس زوجية الدالة f على D_f .

3 – أدرس رتابة الدالة f على المجالين $[0,1]$ و $[1,+\infty[$.

4 – ضع جدول تغييرات الدالة f على D_f .

5 – حدد مطارف الدالة f في المجال $[-3,3]$.

الحل :

1 – $x\in D_f \Leftrightarrow x^2+1\neq 0$ و بما أن لكل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $x^2+1\neq 0$ إذن $D_f=\mathbb{R}$.

2 – ** لدينا : لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن لكل $-x\in\mathbb{R}$.

** لدينا : $f(-x)=\dfrac{2\times(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x)$.

ومنه الدالة f فردية على D_f .

3 – لدراسة الرتابة نستعمل معدل التغير : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2y}{y^2+1}}{x-y}=\dfrac{\dfrac{2x(y^2+1)-2y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}}{x-y}$ بحيث $x\neq y$

$$=\frac{2xy^2+2x-2yx^2-2y}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}=\frac{2xy^2-2yx^2+2x-2y}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}$$

$$=\frac{2xy(y-x)+2(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}=\frac{(2xy-2)(y-x)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}$$

$$=\frac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[0,1]$.

إذن $0<x<1$ و $0<y<1$ ومنه $0<xy<1$ إذن $0<2xy<2$ و بالتالي $-2<2xy-2<0$ إذن $0<-(2xy-2)<2$

ومنه : $-(2xy-2)>0$ و بما أن $(x^2+1)(y^2+1)>0$ فإن $\dfrac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)}>0$ وبالتالي f تزايدية على المجال $[0,1]$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[1,+\infty[$.

إذن $x>1$ و $y>1$ ومنه $xy>1$ إذن $2xy>2$ و بالتالي $2xy-2>0$ إذن $-(2xy-2)<0$

ومنه : $-(2xy-2)<0$ و بما أن $(x^2+1)(y^2+1)>0$ فإن $\dfrac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)}<0$ وبالتالي f تناقصية على المجال $[1,+\infty[$

4 – جدول تغييرات الدالة f

** أولا نضع جدول تغييرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	1	↘	

الدالة f تزايدية على المجال $[0,1]$ و تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ و $f(1)=1$ و $f(0)=0$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	

بما أن الدالة f تناقصية على المجال $\left[1,+\infty\right[$ و نعلم أن الدالة f فردية فإنها تناقصية على $\left]-\infty,-1\right]$.

و بما أن الدالة f تزايدية على المجال $\left[0,1\right]$ و نعلم أن الدالة f فردية فإنها تزايدية على $\left[-1,0\right]$.

5 ـ نلاحظ إنطلاقا من جدول تغييرات الدالة f

أن لكل $x\in\left[-3,3\right]$ أن $-1\le f(x)\le 1$ إذن العدد 1 هو القيمة القصوى للدالة f و أن -1 هو القيمة الدنيا للدالة f .

تمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\dfrac{-|x|}{x^2-1}$.

1 ـ حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2 ـ أدرس زوجية الدالة f على D_f .

3 ـ أدرس رتابة الدالة f على المجالين $\left[0,1\right[$ و $\left]1,+\infty\right[$.

4 ـ ضع جدول تغييرات الدالة f على D_f .

الحل :

1 ـ $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-1\ne 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\ne 0 \Leftrightarrow x-1\ne 0$ و $x+1\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1$ و $x\ne -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

2 ـ ** لدينا : لكل $x\in D_f$ فإن لكل $-x\in D_f$.

** لدينا : $f(-x)=\dfrac{-|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{-|x|}{x^2-1}=\dfrac{-|x|}{x^2-1}=f(x)$.

ومنه الدالة f زوجية على D_f .

3 ـ لدراسة الرتابة نستعمل معدل التغير : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{\dfrac{-|x|}{x^2-1}-\dfrac{-|y|}{y^2-1}}{x-y}=\dfrac{\dfrac{-|x|(y^2-1)+|y|(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)}}{x-y}$ بحيث $x\ne y$

$$=\frac{-|x|(y^2-1)+|y|(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}$$

ليكن $x\in\left[0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{-|x|(y^2-1)+|y|(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{-x(y^2-1)+y(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}$$

$$=\frac{-xy^2+x+yx^2-y}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{yx^2-xy^2+x-y}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{xy(x-y)+x-y}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}$$

$$=\frac{(x-y)(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)}$$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $\left[0,1\right[$.

لدينا $0 \le x < 1$ و $0 \le y < 1$ ومنه $0 \le xy < 1$ إذن $1 < xy + 1 < 2$

و بما ان $0 \le x < 1$ فإن $0 \le x^2 < 1$ ومنه $x^2 - 1 < 0$ و كذلك $y^2 - 1 < 0$ ومنه $\frac{(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $[0,1[$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $]1,+\infty[$.

لدينا $x > 1$ و $y > 1$ ومنه $xy > 1$ إذن $xy + 1 > 2$.

بما أن $x > 1$ فإن $x^2 > 1$ ومنه $x^2 - 1 > 0$ وكذلك $y^2 - 1 > 0$ ومنه $\frac{(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]1,+\infty[$.

4 – جدول تغييرات الدالة f

** أولا نضع جدول تغييرات الدالة f على $[0,1[\cup]1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

الدالة f تزايدية على المجال $[0,1[$ و تزايدية على المجال $]1,+\infty[$ و $f(0) = 0$.

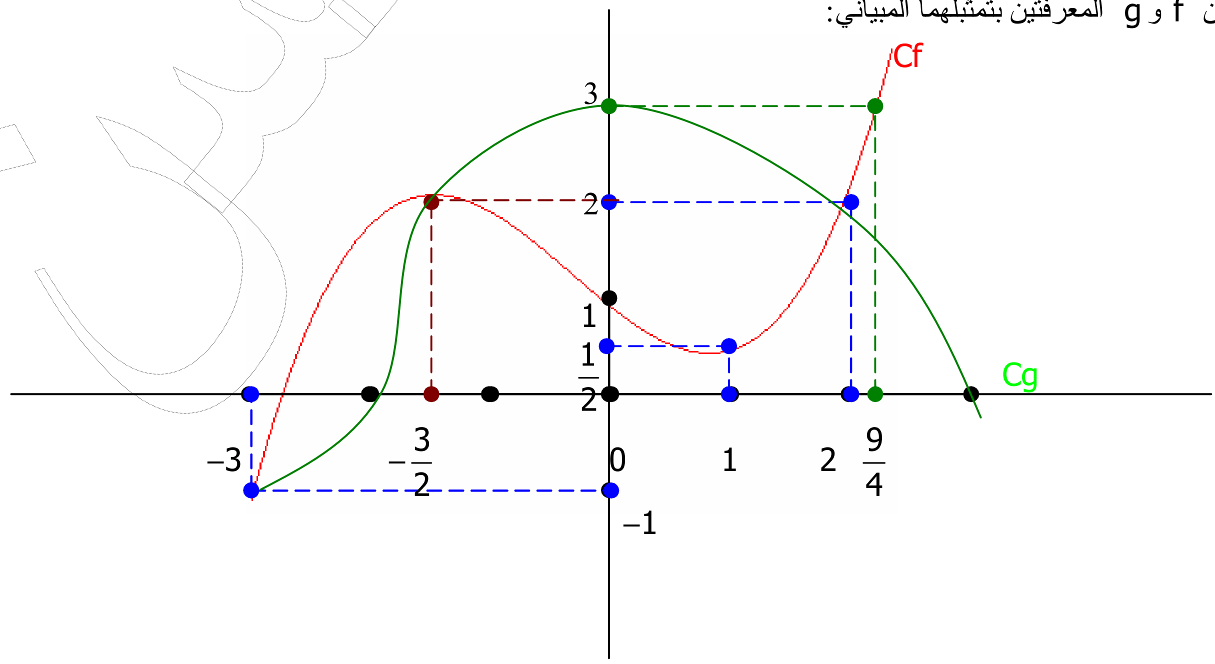
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

بما أن الدالة f تزايدية على المجال $]1,+\infty[$ و نعلم أن الدالة f زوجية فإنها تناقصية على $]-\infty,-1[$.

و بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[0,1[$ و نعلم أن الدالة f زوجية فإنها تناقصية على $]-1,0]$.

تمرين رقم 3 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بتمثيلهما المبياني:



1 ـ حدد مبيانيا : $f\left(\frac{9}{4}\right)$ و $f(-3)$ و $f(1)$ و $g(0)$ و $g(-2)$

2 ـ حل مبيانيا المعادلة : $f(x)=2$.

3 ـ حل مبيانيا المتراجحة : $f(x)>2$.

4 ـ حل المعادلة : $f(x)=g(x)$.

5 ـ حل المتراجحة $f(x)<g(x)$.

الحل :

1 ـ ** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $\left(\frac{9}{4},3\right)$ فإن : $f\left(\frac{9}{4}\right)=3$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $(-3,-1)$ فإن : $f(-3)=-1$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ فإن : $f(1)=\frac{1}{2}$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة g يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $(0,3)$ فإن : $g(0)=3$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة g يمر من النقطة التي إحداثياتها هما العددين : $(-2,0)$ فإن : $g(-2)=0$.

2 ـ بما أن المستقيم الذي معادلته $y=2$ (أفقي) يقطع التمثيل المبياني للدالة f في نقطتين إحداثيتاتهما $(2,2)$ و $\left(\frac{-3}{2},2\right)$

فإن : $f(2)=2$ و $f\left(\frac{-3}{2}\right)=2$ و بالتالي : حلي المعادلة هما العددان 2 و $\frac{-3}{2}$.

3 ـ حل مبانيا المتراجحة $f(x)>2$ يعني تحديد المجالات التي يكون فيها التمثيل المبياني للدالة f فوق المستقيم الذي معادلته $y=2$.

و بما ان التمثيل المبياني ل f يوجد فوق المستقيم $y=2$ في المجال $]2,+\infty[$ فإن حل المتراجحة هو المجال $]2,+\infty[$.

4 ـ حل المعادلة $f(x)=g(x)$ هو تحديد نقط تقاطع التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g .

بما أن التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g يتقاطعان في ثلاث نقط إحداثياتها هي : $(2,2)$ و $\left(\frac{-3}{2},2\right)$ و $(-3,-1)$

فإن حل المعادلة $f(x)=g(x)$ هي الأعداد : 2 و $\frac{-3}{2}$ و -3 .

5 ـ حل المتراجحة $f(x)<g(x)$ هو البحث عن المجالات التي يكون فيها التمثيل المبياني للدالة f تحت التمثيل المبياني للدالة g .

نلاحظ مبيانيا أن التمثيل المبياني للدالة f يوجد فوق التمثيل المبياني للدالة g في المجالين $\left[-3,\frac{-3}{2}\right]$ و $[2,3]$

و يوجد تحته في المجال $\left[\frac{-3}{2},2\right]$.

إذن حل المتراجحة $f(x)<g(x)$ هو المجال $\left]\frac{-3}{2},2\right[$.