

حزيران 2015
المدة : ساعتان والدرجة 70

امتحان مقرر الرياضيات 4
السنة الثانية: تصميم

جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

السؤال الأول: (17 درجة)

- أ - بفرض $z_1 = 1 + 3i$ و $z_2 = 1 - 2i$ فاوجد: $|z_2|$, $z_1 - z_2$, $z_1 + z_2$
ب - اوجد جميع حلول المعادلة $e^z = 1 + i$
ج - برهن أن الدالة $u(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2y$ توافقية على R^2 , ثم اوجد مرافقتها التوافقية $v(x, y)$
بحث تكون الدالة $f(z) = u + iv$ تحليلية على منطقة يطلب تعيينها ثم اوجد المشتقة $f'(x, y)$

السؤال الثاني: (18 درجة)

ب - احسب قيمة كل من التكاملين التاليين : $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2}$ و $I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(z^2 + 4)}$

أ - اوجد منشور لورانت للدالة التالية $f(z) = z e^{\frac{\pi z}{z - \pi}}$ في الحلقة $0 < |z - \pi|$

السؤال الثالث (30 درجة)

أ - باستخدام خصائص الدوال الخاصة اوجد قيمة التكامل

$$K = \int_0^3 \sqrt{\frac{3-x}{x}} dx$$

ب - اوجد متسلسلة فورييه للدالة الدورية المعطاة على مجال الدور كما يلي $f(t) = \cos t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

ج - باستخدام تحويلات لابلاس اوجد

- قيمة التكامل: $M = \int_0^{\infty} e^{-4t} \int_0^t t \sin 2t dt dt$

- مقلوب تحويل لابلاس للدالة $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 16)}$

- حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$, $y'(0) = 5$, $y(0) = -3$

السؤال الرابع: (5 درجات)

باستخدام طريقة فصل المتحولات اوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial_2 u}{\partial t^2} = 36 \frac{\partial_2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 3, t > 0)$$

$$u(0, t) = u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = 3 - x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

حيث

مع اطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق
مدرس المقرر

السؤال الأول: (17 درجة)

أ- بفرض $z_1 = 1 + 3i$ و $z_2 = 1 - 2i$ فأوجد $|z_2|$ ، $z_1 - z_2$ ، $z_1 + z_2$ الحل

$$z_1 + z_2 = 2 - i \quad , \quad z_1 - z_2 = 5i \quad , \quad |z_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

ب- أوجد جميع حلول المعادلة $e^z = 1 + i$ الحل

$$e^z = 1 + i \Rightarrow z = \ln e^z = \ln(1 + i) = \ln[\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}] = \ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \quad (2)$$

ج- برهن أن الدالة $u(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2y$ توافقية على R^2 ، ثم أوجد مرافقتها التوافقية $v(x, y)$ بحيث تكون الدالة $f(z) = u + iv$ تحليلية على منطقة يطلب تعيينها ثم أوجد المشتقة $f'(z)$ الحل

$$u_x = 6xy, u_{xx} = 6y, u_y = 3x^2 - 3y^2 - 2, u_{yy} = -6y \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x = v_y = 6xy \Rightarrow v(x, y) = 3xy^2 + \phi(x) \quad (3)$$

$$u_y = -v_x = 3x^2 - 3y^2 - 2 = -3y^2 - \phi'(x) \Rightarrow$$

$$\phi'(x) = -3x^2 + 2 \Rightarrow \phi(x) = -x^3 + 2x + c$$

$$f(x, y) = (3x^2y - y^3 - 2y) + i(3xy^2 - x^3 + 2x + c), (x, y) \in R^2$$

$$f'(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + i(3y^2 - 3x^2 + 2) \quad (3)$$

السؤال الثاني: (18 درجة)

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(z^2+4)} \quad , \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2} \quad : \text{ب- احسب قيمة كل من التكاملين التاليين}$$

الحل

لحل التكامل I نلاحظ أن للدالة المكاملة ثلاث نقاط شاذة وهي $z_0 = 0$ وهي واقعة داخل مسار المكاملة والذي هو الدائرة التي مركزها في النقطة 0 ونصف قطرها $R = 1$ والنقطة $z_1 = 2i$ تهمل لوقوعها خارج طريق المكاملة

وكذلك النقطة $z_2 = -2i$ ايضاً تهمل لوقوعها خارج طريق المكاملة لنحسب راسب الدالة المكاملة عند النقطة الشاذة

$$\text{Res} \left[\frac{1}{z^3(z^2+4)}, z_0 = 0 \right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z^3 \frac{1}{z^3(z^2+4)} \right) = -\frac{1}{16}$$

ومنه نجد

$$I = 2\pi i \left(-\frac{1}{16} \right) = -\frac{\pi}{8} i \quad (7)$$

ولحل التكامل J نلاحظ ان التكامل يحقق شروط الحالة الثالثة ولذلك نحسب التكامل $\oint_{\Gamma} \frac{e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2} dz$ حيث Γ هو المحور OX والنصف العلوي للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي إلى اللانهاية. والدالة المكملة قطبين بسيطين هما $z_1 = -1 + 2i$ و $z_2 = -1 - 2i$ ينتم لوقوعه في النصف السفلي من المستوي المركب لنحسب الراسب عند z_1

$$\text{Res} \left[\frac{e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2}, z_1 = -1 + 2i \right] = \lim_{z \rightarrow -1 + 2i} \left(\frac{e^{2iz}}{[z - (-1 + 2i)][z - (-1 - 2i)]} \right) = \frac{e^{-2-2i}}{2i}$$

وبذلك يكون

$$I = \text{Im} \left[2\pi i \left(\frac{e^{-2-2i}}{2i} \right) \right] = -\frac{\pi}{2} \sin 2$$

أ- أوجد منشور لورانت للدالة التالية $f(z) = z e^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$ في الحلقة $0 < |z - \pi|$ الحل

$$f(z) = z e^{\frac{\pi z}{z-\pi}} = [(z - \pi) + \pi] e^{\frac{\pi(z-\pi+\pi)}{z-\pi}} = [(z - \pi) + \pi] e^{\pi + \frac{\pi^2}{z-\pi}}$$

$$= [(z - \pi) + \pi] e^{\pi} e^{\frac{\pi^2}{z-\pi}} = [(z - \pi) + \pi] e^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{n! (z - \pi)^n}$$

السؤال الثالث (30 درجة)

أ - باستخدام خصائص الدوال الخاصة أوجد قيمة التكامل $K = \int_0^1 \sqrt{\frac{3-x}{x}} dx$

الحل

$$K = \int_0^1 \sqrt{\frac{3-x}{x}} dx = \int_0^1 \sqrt{(3-3t)(3t)}^{-\frac{1}{2}} 3 dt = 3 \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= 3 \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} = 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{1!} = \frac{3\pi}{2}$$

ب - أوجد متسلسلة فورييه للدالة الدورية المعطاة على مجال الدور كما يلي $f(t) = \cos t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

الحل

الدالة متصلة ودورية ومحدودة فهي تحقق شروط ديرخلية نورها $T = \pi$ وهي زوجية ولذلك نكتب $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{4}{\pi} [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \cos 2nt \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(1+2n)t + \cos(1-2n)t] \, dt \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(1-2n)t}{1-2n} - \frac{\sin(1+2n)t}{1+2n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} (-1)^n \left[\frac{1}{4n^2-1} \right]
 \end{aligned}$$

وبذلك يكون

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \right] \cos 2nt$$

ج - باستخدام تحويلات لابلاس أوجد

$$M = \int_0^{\infty} e^{-4t} \int_0^t t \sin 2t \, dt \, dt \quad \text{- قيمة التكامل:}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{\infty} e^{-4t} \int_0^t t \sin 2t \, dt \, dt = L \left[\int_0^t t \sin 2t \, dt, s=4 \right] = \left(\frac{1}{s} L[t \sin 2t, s] \right)_{s=4} \\
 &= \left(\frac{-1}{s} (L[\sin 2t, s])' \right)_{s=4} = \left[\frac{-1}{s} \left(\frac{2}{s^2+4} \right)' \right]_{s=4} = \left[\frac{-1}{s} \left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2} \right) \right]_{s=4} = \frac{1}{100}
 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+16)} \quad \text{- مقلوب تحويل لابلاس للدالة}$$

الحل:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+16)} \right] = \int_0^t L^{-1} \left[\frac{1}{s^2+16} \right] dt = \frac{1}{4} \int_0^t \sin 4t \, dt = \frac{1}{16} \cos 4t \Big|_0^t = \frac{-1}{16} (\cos 4t - 1)$$

- حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' - 3y' - 2y = 4e^{2t}$, $y'(0) = 5$, $y(0) = -3$

الحل: نأخذ لابلاس للطرفين فنجد

$$L[y'' - 3y' - 2y] = L[4e^{2t}]$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s) - 3s - 5 - 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$= \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-2)^2(s-1)} = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-2)^2(s-1)}$$

$$= \frac{A}{(s-2)^2} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{s-1} = \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{4}{(s-2)} + \frac{-7}{s-1}$$

$$y(t) = (4t e^{2t} + 4e^{2t} - 7e^t) u(t)$$

3

باستخدام طريقة فصل المتحولات اوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 3, t > 0)$$

$$u(0, t) = u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = 3 - x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

حيث
الحل:

إن طريقة فصل المتحولات تعتمد على أن نفرض أن المعادلة المعطاة تقبل حلا من الشكل

$$u(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) (C \cos 6\lambda t + D \sin 6\lambda t)$$

ومن الشروط الحدية نجد $A = 0$ و $\lambda = \frac{n\pi}{3}$ وبذلك يعطى حل المعادلة بالعلاقة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 2n\pi t + D_n \sin 2n\pi t) \sin \frac{n\pi x}{3} \quad (2)$$

$$C_n = \frac{2}{3} \int_0^3 (3-x) \sin \frac{n\pi}{3} x \, dx = \frac{6}{n\pi}$$

$$D_n = \frac{2}{6n\pi} \int_0^3 0 \, dx = 0 \quad (3)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \cos(2n\pi t) \sin\left(\frac{n\pi}{3} x\right)$$