



www.dirasats.com



هذا الغلاف لا يعبر عن حقوق الملكية او فحوى الكتاب, فهو مجرد واجهة للموقع المحمل منه

شكرا لك على ثقتك بنا وعلى اختيار موقعنا

www.dirasats.com



من اجل تواصل معنا المرجو زيارة الموقع ستجد جميع المعلومات

www.dirasats.com

Université Sultan Moulay Slimane
FST de Béni Mellal
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2016/2017

Série N°1

MIPC : Algèbre

Exercice 1 :

Ecrire la négation des assertions suivantes :

- 1) Toutes les voitures rapides sont rouges.
- 2) Pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}^*$ tel que $0 \leq q \leq \varepsilon$.
- 3) $\neg P \wedge Q, \neg P \vee Q, P \vee (Q \wedge R), P \wedge (Q \wedge R)$
 $P \Rightarrow \neg Q, P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 2 :

Montrer que les assertions $P \wedge \neg Q$ et $\neg(P \Rightarrow Q)$ sont équivalentes.

Exercice 3 :

- 1) En utilisant un raisonnement par contraposition, montrer que si p^2 est pair alors p est pair, $p \in \mathbb{N}$.
- 2) En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4 :

Démontrer par récurrence :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application,

A, B deux parties de E et C, D deux parties de F .

Montrer les propriétés suivantes.

- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- $f^{-1}(\overline{C}) = \overline{f^{-1}(C)}$ où \overline{C} = Complémentaire de C dans F .
- $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice 6 :

Montrer si les applications suivantes sont injectives ? surjectives ?

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & , & g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 & , & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x^3 - x & & (x, y) \mapsto (x+y, x-y) & & (n, m) \mapsto 2^n 3^m \end{array}$$

Exercice 7 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer les propriétés suivantes :

- 1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
- 2) f est surjective $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$
- 3) f est injective $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$.
- 4) f est bijective $\Leftrightarrow f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Exercice 8 :

Dans \mathbb{R}^2 , on définit la relation R par $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow y = y'$.
Montrer que R est une relation d'équivalence.

Rappel:

$$f: E \rightarrow F$$

* f injective $\Leftrightarrow \forall m, n' \in E^2, f(m) = f(n') \Rightarrow m = n'$
 $\Leftrightarrow \forall m, n' \in E^2, m \neq n' \Rightarrow f(m) \neq f(n')$

* f n'est pas injective $\Leftrightarrow \exists m, n' \in E^2, f(m) = f(n')$ et $m \neq n'$

* f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists m \in E, f(m) = y$

* f bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! m \in E, f(m) = y$

$$f: E \rightarrow F, A \subset E$$

* $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists m \in A, f(m) = y$

* $m \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(m) \in B, m \in E$

Exercice 5:

* Montrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

Soit $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists m \in A$ tel que $f(m) = y$

or $A \subset B$, alors $\exists m \in B$ tel que $f(m) = y$

Alors $y \in f(B)$ Donc $f(A) \subset f(B)$.

$$* f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

On a : $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$

de même : $B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$

$$\Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \quad (1)$$

Réciproquement, on montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Soit $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists m \in A \cup B$ tel que $f(m) = y$

alors $\exists m \in A$ ou $\exists m \in B$ tel que $f(m) = y$

$\exists m \in A, f(m) = y$ ou $\exists m \in B, f(m) = y$

Alors $y \in f(A) \cup f(B)$; Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

$$\Rightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

T.D N°1 : Algèbre I

Exercice 1 :

- ① Il existe une voiture rapide, qui n'est pas rouge
- ② Il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $q \in \mathbb{Q}^+ / 0 < q < \varepsilon$
- ③ *
- $\neg(\neg P \wedge Q) = \neg(\neg P) \vee \neg Q = P \vee \neg Q$
 - * $\neg(\neg P \vee Q) = \neg(\neg P) \wedge \neg Q = P \wedge \neg Q$
 - * $\neg(P \vee (Q \wedge R)) = \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
 - * $\neg(P \wedge (Q \wedge R)) = \neg(P \wedge Q \wedge R) = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$
 - * $\neg(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
 $\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge \neg(\neg Q)$
 $\Leftrightarrow P \wedge Q$
 - * $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$
 $\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$
 $\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

Exercice 2 :

+ 1^{ère} méthode : table de vérité :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$P \wedge \neg Q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

$$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow Q)$$

+ 2^{ème} méthode :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \text{ alors } \neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$
$$\text{Donc } \neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$$

Exercice 3:

$$(P \Rightarrow Q \rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P)$$

① On va utiliser, le raisonnement par contraposition:
Soit $P \in \mathbb{N}$, on suppose que p est impair, alors
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que: $P = 2k + 1$, et on va
montrer que P^2 est impair.

On a:

$$P = 2k + 1 \text{ et on a } P^2 = (2k + 1)^2$$

$$P^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$= 2k' + 1 \text{ on pose } (k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z})$$

Donc P^2 est impair

cette assertion est vraie: (P est impair $\Rightarrow P^2$ est impair)

Donc par la démonstration contraposée:

$$P^2 \text{ est pair} \Rightarrow P \text{ est pair}$$

② On montre que: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ GCD } = 1 \text{ (Plus grand diviseur commun)}$$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$$p^2 \text{ est pair} \Rightarrow p \text{ est pair}$$

$$p = 2k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \frac{4k^2}{q^2} = 2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 = 2\alpha$$

$$\text{et } q = 2\beta$$

$$\text{Ainsi: } \begin{cases} p = 2k \\ q = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \text{PGCD}(p, q) = 2$$

Il ressort de notre démonstration une contradiction
de l'hypothèse posée d'où $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 4 :

$$① \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Soit $p(n)$, la proposition :

$$n=1 \Rightarrow \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (vraie)}$$

On suppose que $p(n)$ est vraie et on montre que $p(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

$$② \quad \forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pour $n=0$: $0^2 = \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} \Rightarrow 0=0$

ce qui est vrai

On suppose que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
et montrons que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

* Montrons que: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists n \in A \cap B \text{ tq } f(n) = y \\ &\Leftrightarrow \exists n \in A \text{ et } \exists n \in B \text{ tq } f(n) = y \\ &\Leftrightarrow \exists n \in A \text{ tq } f(n) = y \text{ et } \exists n \in B \text{ tq } f(n) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Donc : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

* 2^{ème} méthode : on sait que $A \cap B \subset A \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A)$
de même $A \cap B \subset B \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(B)$

Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Calcul de f^{-1} d'un ensemble :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto f(n) = n^2$$

$$* f^{-1}(\{-1\}) \Rightarrow f(n) \in \{-1\}$$

$$\text{c-à-d } f(n) = -1 \Rightarrow n^2 = -1$$

$$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$$

$$* f^{-1}([0, 4]) \Rightarrow f(n) \in [0, 4]$$

$$\text{c-à-d } n^2 \in [0, 4]$$

$$\text{alors } n^2 \leq 4$$

$$\text{donc } |n| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq n \leq 2$$

$$f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$$

* On montre que $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

$$\text{Soit } n \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(n) \in C, \quad n \in E$$

$$\text{or } C \subset D \text{ alors } f(n) \in D, \quad n \in E$$

$$\text{Donc } n \in f^{-1}(D), \quad \text{d'où } f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$$

hors TD

On sait que :

$$C \subset C \cup D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C \cup D)$$

de même $D \subset C \cup D \Rightarrow f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

Alors $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$ ①

Réciproquement : $x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$

$$\Rightarrow f(x) \in C \quad \text{ou} \quad f(x) \in D$$

Alors $x \in f^{-1}(C)$ ou $x \in f^{-1}(D)$

Donc $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

D'où $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ ②

D'après ① et ② on a : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Exercice 6 :

$$* f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$n \mapsto n^3 - n$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} f(0) = f(1) = 0$$

or $0 \neq 1$ Donc f n'est pas injective

$$\bullet \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{R}, f(n) = y$$

$$n^3 - n = y$$

Alors f est surjective

$$* g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(n, y) \mapsto (n+y, n-y)$$

$$\forall (n, y), (n', y') \in \mathbb{R}^2, g(n, y) = g(n', y')$$

$$\Rightarrow (n, y) = (n', y')$$

$$g(n, y) = g(n', y')$$

$$(n+y, n-y) = (n'+y', n'-y')$$

Alors

$$\begin{cases} n+y = n'+y' \\ n-y = n'-y' \end{cases}$$

En faisant la somme : $2n = 2n' \Rightarrow n' = n$

La différence : $2y = 2y' \Rightarrow y' = y$

Donc les couples (n, y) et (n', y') sont égaux.

- Montrons que g est surjective.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists (u, v) \in \mathbb{R}', g(u, v) = (x, y)$$

$$g(u, v) = (x, y)$$

C.-à.-d. $(u + v, u - v) = (x, y)$

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

Alors g est surjective.

$\Rightarrow g$ est injective et surjective donc elle est bijective

$$* h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto 2^n 3^m$$

- Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$
Supposons que $h(n, m) = h(p, q)$ et vérifions
si $(n, m) = (p, q)$

$$h(n, m) = h(p, q) \Rightarrow 2^n 3^m = 2^p 3^q$$

$$2^{n-p} = 3^{q-m}$$

Cela est vrai si $n-p=0$ et $q-m=0$
donc $n=p$ et $q=m$ alors $(n, m) = (p, q)$
d'où h est injective.

- $\forall y \in \mathbb{N}, \exists (n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $h(n, m) = y$
 $2^n 3^m \neq 5$, 5 n'appartient pas à l'image
 $\Rightarrow h$ n'est pas surjective

Exercice 7: $f: E \rightarrow F$, $A \subset E$, $B \subset F$

① Soit $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists n \in f^{-1}(B)$, tq: $y = f(n)$

$$\text{or } n \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(n) = B \\ \Rightarrow y = f(n) \in B$$

$$\text{d'autre part: } n \in f^{-1}(B) \subset E \Rightarrow f(n) \in f(E) \\ \Rightarrow y \in f(E)$$

$$\begin{cases} y \in B \\ y \in f(E) \end{cases} \Rightarrow y \in B \cap f(E)$$

Inversement: $B \cap f(E) \subset f(f^{-1}(B))$?

$$\text{Soit } y \in B \cap f(E)$$

$$\Rightarrow y \in B \text{ et } y \in f(E)$$

$$\Rightarrow y \in B \text{ et } y \in f(n), n \in E$$

$$\text{Donc } f(n) \in B \Rightarrow n \in f^{-1}(B)$$

$$\Rightarrow f(n) = y \in f(f^{-1}(B))$$

② f est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$.

$$\Leftrightarrow f(E) \cap B = F \cap B = B$$

$$(\text{car } f(E) \cap B = f(f^{-1}(B)))$$

$$\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$$

③ f est injective $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$

\Rightarrow Si f est injective,

$$\text{d'après Ex}_5 \text{ on a: } A \subset f^{-1}(f(A))$$

$$\text{Soit } n \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(n) \in f(A)$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \text{ tq } f(n) = f(a)$$

$$\Rightarrow n = a \quad (\text{car } f \text{ injective})$$

$$\Rightarrow n \in A$$

Donc par suite $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subset A$

$$\text{Donc } A = f^{-1}(f(A))$$

\Leftarrow Supposons que $f^{-1}(f(A)) = A$ et montrons que f est injective:

Soient, $x, y \in E$, tq : $f(x) = f(y)$.

Posons $A = \{x\}$, on a : $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$

$$\text{donc } f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\text{de même si } A = \{y\} \Rightarrow f^{-1}(f(\{y\})) = \{y\} \\ \Rightarrow f^{-1}(f(y)) = y$$

$$\text{or } f(x) = f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) \\ \Rightarrow x = y \\ \Rightarrow f \text{ est injective}$$

$\textcircled{4}$ f est bijective $\Leftrightarrow f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

\Rightarrow Supposons que f est bijective et montrons que $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

$$\bullet f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}:$$

$$\text{Soit } y \in f(\bar{A}) \Rightarrow \exists x \in \bar{A} = C_E^A \text{ tq : } y = f(x) \\ \Rightarrow \exists x \in E \text{ et } x \notin A \text{ tq : } y = f(x)$$

$$\text{or : } x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A) \text{ Car :}$$

$$\text{Si } f(x) \in f(A) \Rightarrow \exists a \in A \text{ tq : } f(x) = f(a) \\ \Rightarrow x = a \quad (f \text{ injective}) \\ \Rightarrow x \in A \quad \text{absurde}$$

$$\text{Donc } y = f(x) \notin f(A) \Rightarrow y \in C_F^{f(A)} = \overline{f(A)}$$

$$\text{Par suite } f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$$

Inversement: Soit $y \in \overline{f(A)} = C_F^{f(A)}$

$$\Rightarrow y \in F \text{ et } y \notin f(A)$$

or $y \in F$ et f est surjective $\Rightarrow \exists n \in E$

$$\text{tq : } y = f(n) \Rightarrow f(n) \notin f(A)$$

$$\Rightarrow n \notin A$$

$$\Rightarrow n \in \bar{A}$$

$$\Rightarrow f(n) = y \in f(\bar{A})$$

$$\Rightarrow \overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$$

⊞ si $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$. Montrons que f est bijective.

• Surjection : Montrons que $f(E) = F$

$$\text{si } A = \emptyset \Rightarrow f(\emptyset) = \overline{f(\emptyset)}$$

$$\Rightarrow f(E) = \bar{\emptyset} = F$$

• Injection : D'après ③ il suffit de montrer que $f^{-1}(f(A)) = A$.

$$\text{on a : } f(\bar{A}) = \overline{f(A)} \Rightarrow \overline{f(\bar{A})} = \overline{\overline{f(A)}}$$

$$\Rightarrow \overline{f(\bar{A})} = f(A)$$

$$\Rightarrow A = f^{-1}(\overline{f(\bar{A})}) \Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$$

Exercice 8 : $(n, y) R (n', y') \Leftrightarrow y = y'$

* R est reflexive car :

$$\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2, (n, y) R (n, y) \quad (\text{car } y = y)$$

* R est symétrique. car :

$$\text{si } (n, y) R (n', y') \Rightarrow y = y' \Rightarrow y' = y \Rightarrow (n', y') R (n, y)$$

* R est transitive :

$$\text{si } (n, y) R (n', y') \text{ et } (n', y') R (n'', y'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y' \text{ et } y' = y'' \Rightarrow (n, y) R (n'', y'')$$