

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Huỳnh Phương Nam

**CONTINUUM PEANO DƯỚI TÁC
ĐỘNG NHÓM P – ADIC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh – 2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Huỳnh Phương Nam

**CONTINUUM PEANO DƯỚI TÁC
ĐỘNG NHÓM P – ADIC**

Chuyên ngành: Hình học và Tô pô
Mã số: 62 46 01 05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN HÀ THANH

Thành phố Hồ Chí Minh – 2014

MỤC LỤC

Trang phụ bìa

Mục lục

MỞ ĐẦU	1
Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.....	5
1.1. Các khái niệm tôpô.....	5
1.2. Giới hạn ngược, số p – adic. p – adic solenoid	12
1.3. Ánh xạ phủ, phép nâng, tập bất biến.....	18
Chương 2. PHÂN HOẠCH	20
2.1. Tính chất S	20
2.2. Phân hoạch	22
Chương 3. CONTINUUM PEANO DƯỚI TÁC ĐỘNG NHÓM P – ADIC ...	28
3.1. Định nghĩa và ký hiệu.....	28
3.2. Phân hoạch đẳng biến của continuum Peano.....	29
3.3. Phép nâng cung và phép đồng luân	35
3.4. Tập bất biến	39
KẾT LUẬN	55
TÀI LIỆU THAM KHẢO	58

MỞ ĐẦU

Vào cuối thế kỷ XIX, bên cạnh những loại số thông thường đã biết như số tự nhiên \mathbb{N} , số nguyên \mathbb{Z} , số hữu tỷ \mathbb{Q} , số thực \mathbb{R} và số phức \mathbb{C} , nhà toán học Đức Kurt Hensel đã sử dụng một ý tưởng tương tự như khi ta xét các hàm số trên một đường cong đại số áp dụng vào lý thuyết số để sáng tạo ra một loại số mới ngoài những số thông thường đã biết trong lý thuyết số được gọi là số p -adic (hay tổng quát hơn là nhóm p -adic) trong đó p là số nguyên tố. Các số này đã bổ sung cho các tập số phía trên và theo Ostrowski đã vét cạn mọi cách mở rộng số hữu tỷ. Kể từ đó đến nay, các số p -adic không ngừng được tìm hiểu những tính chất cũng như các ứng dụng của nó trong các lĩnh vực khác nhau của toán học cũng như trong vật lý. Những nghiên cứu cơ bản đầu tiên là những nguyên cứu xây dựng giải tích p -adic, tức là giải tích trên các số p -adic: các phép tính vi phân, phương trình vi phân, tích phân, các hàm giải tích, biến đổi Fourier, lý thuyết nhóm... được tiến hành bởi nhiều nhà toán học. Các số p -adic dẫn đến metric không – Archimedean thích hợp cho sự mô tả không – thời gian rời rạc. Cùng với vẻ đẹp toán học, các số p -adic trở thành một công cụ hữu hiệu giúp các nhà vật lý mô tả chính xác hơn thế giới khách quan trong nhiều lĩnh vực từ vi mô đến vĩ mô: cơ học lượng tử, lý thuyết dây, môi trường đông đặc, vũ trụ học,... và khoa học nhận thức.

Ngày 08 tháng 08 năm 1900, tại hội nghị toán học quốc tế tổ chức tại Paris, nhà toán học Đức David Hilbert đã đưa ra một bản danh sách gồm 23 vấn đề (bài toán) trong toán học vẫn chưa có lời giải tại thời điểm đó được ông tin là quan trọng cấp thiết nhất (một số bài toán sau này có sự ảnh hưởng lớn đến nền toán học của thế kỷ XX). Trong danh sách trên thì vấn đề số 5 liên quan đến các nhóm Lie liên tục. Hilbert tin rằng các phép biến đổi giữa các nhóm này có thể được mô tả theo một cách mà khi đó chúng là các vi phân.

Vào những năm 1940, Paul A. Smith đã tổng quát bài toán số 5 mà Hilbert nêu ra (sau này được gọi là phỏng đoán Hilbert – Smith) như sau: “Nếu G là một nhóm compact địa phương tác động một cách hiệu quả lên một đa tạp như một nhóm biến đổi (tôpô) thì G có là một nhóm Lie hay không?”. Phỏng đoán này cũng được chính ông chứng minh là tương đương với câu hỏi: “Với một đa tạp M thì liệu có tồn tại một tác động hiệu quả của một nhóm p – adic A_p lên đa tạp này hay không?”.

Kể từ khi bài toán được đưa ra cho đến nay đã có nhiều nhà toán học tham gia giải quyết và đã chứng minh được sự tồn tại của tác động hiệu quả này như:

- L.E.J Brouwer đã giải quyết trường hợp $\dim M = 2$ vào năm 1919.
- J. Pardon với $\dim M = 3$ vào năm 2011 [7].
- Bochner – Montgomery đã chứng minh nhóm A_p tác động bằng các vi phôi (năm 1946).
- Šćepin - Repovš cũng chỉ ra nhóm A_p tác động bằng các đồng phôi Lipschitz (năm 1997).

Tuy nhiên, với các số chiều lớn hơn 3 thì phỏng đoán này vẫn còn là bài toán mở quan trọng của hình học tôpô và vẫn được triển khai bởi các nhà toán học theo nhiều hướng nhỏ khác nhau. Một trong các hướng đó là thay đa tạp trong phỏng đoán bằng các không gian mà nhóm p – adic có thể tác động hiệu quả lên được. Năm 2005, Zhiqing Yang đã xây dựng được một lớp các không gian cho tác động này[11]. Trong bài viết này, chúng tôi đề cập đến một kết quả liên quan đến tác động nhóm p – adic lên continuum Peano và từ đó nêu ra kết quả tổng quát hơn cho nhóm compact 0 chiều tác động lên continuum Peano.

Ngoài ra, khi nhóm p – adic A_p tác động một cách hiệu quả lên một số không gian X khác nhau thì ta sẽ có các kết quả về số chiều đối đồng điều nguyên của không gian quỹ đạo (không gian thương) như sau:

- Nếu X là không gian Hausdorff liên thông địa phương thì ta có $\dim_{\mathbb{Z}} X/A_p \leq 3 + \dim_{\mathbb{Z}} X$ [10], trong đó $\dim_{\mathbb{Z}} X$ ký hiệu số chiều đối đồng điều nguyên.
- Nếu X compact thì bất đẳng thức trên được thu hẹp thành $\dim_{\mathbb{Z}} X/A_p \leq 2 + \dim_{\mathbb{Z}} X$ [4].
- Nếu X là đa tạp thì không gian thương có số chiều đối đồng điều nguyên thỏa $\dim_{\mathbb{Z}} X/A_p = 2 + \dim_{\mathbb{Z}} X$ [10]. Đẳng thức này vẫn đúng khi X là một ANR (lân cận co rút tuyệt đối) và tác động A_p là tác động tự do [5].
- Không gian thương X/A_p không có số chiều đủ [4],[5].

Chúng ta sẽ bổ sung thêm một kết quả mới vào danh sách trên khi X là continuum Peano. Nếu A_p tác động hiệu quả thì ta chứng minh được sự tồn tại của những phép nâng các cung từ không gian thương sinh bởi tác động này. Tương tự, với bất kỳ continuum con liên thông đơn của không gian quỹ đạo thì các phép nâng vẫn tồn tại. Khi đó ta có một đẳng cấu giữa những nhóm đồng luân bậc cao $\pi_n(X) \cong \pi_n(X/A_p)$ với mọi $n \geq 2$.

Cuối cùng, luận văn sẽ trình bày những kết quả thu được khi tác động A_p từ hiệu quả được thu hẹp lại thành tác động tự do. Nếu X là continuum Peano không phân tích địa phương được bởi bất kỳ tập 1 – chiều nào thì với mọi điểm $x \in X$ ta có những tập con bất biến đặc trưng của X chứa x . Các tập đó là p – adic solenoid, p^k các p – adic solenoid phân biệt với k là số tự nhiên bất kỳ, không gian $A_p \times S^1$ và đường cong Menger μ^1 .

Do đó luận văn được chia làm ba chương chính như sau:

Chương 1. KIẾN THỨC CƠ SỞ chủ yếu trình bày các khái niệm xuất hiện trong luận văn.

Chương 2. PHÂN HOẠCH trình bày khái niệm phân hoạch một tập và điều kiện để một tập phân hoạch được.

Chương 3. CONTINUUM PEANO DƯỚI TÁC ĐỘNG P – ADIC trình bày các kết quả chính thu được như đã giới thiệu phía trên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Nguyễn Hà Thanh, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, giúp đỡ tôi về mặt nghiên cứu cũng như niềm tin để hoàn thành luận văn này.

Bên cạnh đó, tôi cũng xin chân thành gửi lời cảm ơn đến các quý thầy cô trong tổ bộ môn Hình học nói riêng và toàn thể quý thầy cô khoa Toán – Tin trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh nói chung đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè đã động viên và tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn này.

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Nội dung chủ yếu của chương này là giới thiệu các khái niệm trong tôpô đại cương được dùng trong Chương 3. Ngoài ra, chương này cũng nêu khái niệm về giới hạn ngược, số p -adic và một số ví dụ làm rõ để từ đó trong Chương 3 ta sẽ trình bày khái niệm về nhóm p -adic.

1.1. Các khái niệm tôpô

1.1.1. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là một không gian T_1 nếu với mọi cặp điểm phân biệt $x_1, x_2 \in X$ thì tồn tại một tập mở $U \subset X$ sao cho $x_1 \in U$ và $x_2 \notin U$.

1.1.2. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là một không gian $T_{3\frac{1}{2}}$ hay *không gian Tychonoff* hoặc là không gian chính tắc đầy đủ nếu X là không gian T_1 và với mọi $x \in X$, mọi tập đóng $F \subset X$ sao cho $x \notin F$ thì tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow I$ sao cho $f(x) = 0$ và $f(y) = 1$ với $y \in F$.

1.1.3. Định nghĩa

Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là *đồng phôi nhúng* nếu nó là đồng phôi đồng thời cũng là phép nhúng; tức là nếu tồn tại một không gian con L của Y và một đồng phôi $f' : X \rightarrow L$ sao cho $f = i_L f'$.

1.1.4. Định nghĩa

Cho X là một không gian tôpô và A là không gian con của X . Khi đó một ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow A$ là một *phép co* nếu f khi thu hẹp vào A thì f là ánh xạ đồng nhất trên A ; tức là $f(a) = a$ với mọi $a \in A$. Khi đó ta gọi A là *cái co* của X .

1.1.5. Định nghĩa

Nếu tồn tại một tập mở U sao cho $A \subset U \subset X$ và A là một cái co của U thì A được gọi là một *lân cận co* của X .

1.1.6. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là *lân cận co tuyệt đối* nếu với mọi không gian định chuẩn Y nhúng được vào X như một tập con đóng và X là lân cận co của Y .

1.1.7. Định nghĩa

Một tính chất tôpô \mathcal{P} được gọi là *di truyền* nếu với bất kỳ không gian X có tính chất \mathcal{P} mọi tập con của X cũng phải có tính chất \mathcal{P} .

1.1.8. Định nghĩa

Hai tập con A và B của không gian tôpô X được gọi là *tách* nếu $A \cap \bar{B} = \emptyset = \bar{A} \cap B$.

1.1.9. Định nghĩa

Hai tập con A và B của không gian tôpô X được gọi là *phân tách hoàn toàn* nếu tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow I$ thỏa $f(x) = 0$ với $x \in A$ và $f(x) = 1$ với $x \in B$. Khi đó ta nói f *tách* hai tập A và B .

1.1.10. Định nghĩa

Một họ $\{A_s\}_{s \in S}$ các tập con của tập X được gọi là *phủ* của X nếu $\bigcup_{s \in S} A_s = X$. Nếu X là không gian tôpô và các tập A_s đều là tập mở (đóng) thì ta gọi phủ $\{A_s\}_{s \in S}$ là phủ *mở* (*đóng*).

1.1.11. Định nghĩa

Một phủ $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ khác của tập X được gọi là *lọc* của phủ $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ nếu tồn tại $s \in S$ sao cho $B_t \subset A_s$. Khi đó ta nói \mathcal{B} *làm mịn* \mathcal{A} .

1.1.12. Định nghĩa

Một phủ $\mathcal{A}' = \{A_{s'}\}_{s' \in S'}$ của X là *phủ con* của phủ $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ của X nếu $S' \subset S$ và $A'_s = A_s$ với mọi $s \in S'$. Nói riêng, mọi phủ con là một lọc.

1.1.13. Định nghĩa

Một cái phủ của không gian tôpô gồm các tập mở (đóng) các phiếm hàm được gọi là *phủ hàm mở (đóng)*.

1.1.14. Định nghĩa

Gọi $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ là phủ của tập X . Ta nói *tập sao của* $M \subset X$ *liên hệ với* \mathcal{A} là tập $\text{St}(M, \mathcal{A}) = \bigcup \{A_s : M \cap A_s \neq \emptyset\}$. Tập sao của tập một điểm $\{x\}$ liên hệ với \mathcal{A} được gọi là *sao của điểm* x *liên hệ với* \mathcal{A} và được ký hiệu là $\text{St}(x, \mathcal{A})$. Ta gọi một phủ $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ của tập X là một *lọc sao* của phủ $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ nếu với mọi $t \in T$ tồn tại một $s \in S$ sao cho $\text{St}(B_t, \mathcal{B}) \subset A_s$. Nếu với mọi $x \in X$ tồn tại một $s \in S$ sao cho $\text{St}(x, \mathcal{B}) \subset A_s$ thì ta nói \mathcal{B} là một *lọc trọng tâm của* \mathcal{A} . Hiển nhiên mọi lọc sao là lọc trọng tâm và mọi lọc trọng tâm là lọc.

1.1.15. Định nghĩa

Ảnh ngược của những tập một điểm qua ánh xạ f được gọi là các *thớ* của f .

1.1.16. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là *compact* nếu mọi phủ mở của X đều có một phủ con hữu hạn. Nghĩa là với mọi phủ mở $\{U_s\}_{s \in S}$ của không gian X tồn tại một tập hữu hạn $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset S$ sao cho $X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_k}$.

1.1.17. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là *compact địa phương* nếu với mọi $x \in X$ tồn tại một lân cận U của x sao cho \bar{U} là một không gian con compact của X . Do không gian compact \bar{U} là không gian T_1 nên tập $\{x\}$ đóng trong \bar{U} .

Điều này suy ra $\{x\}$ đóng trong X . Tức là mọi không gian compact địa phương là không gian T_1 .

1.1.18. Định nghĩa

Một ánh xạ đóng liên tục $f : X \rightarrow Y$ được gọi là *hoàn chỉnh* nếu X là không gian Hausdorff và mọi thớ $f^{-1}(y)$ là tập con compact của X .

1.1.19. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là *liên thông* nếu X không thể được viết dưới dạng $X_1 \oplus X_2$ trong đó X_1 và X_2 là các tập con khác rỗng của X và \oplus là ký hiệu tổng trực tiếp.

1.1.20. Định nghĩa

Một không gian tôpô X gọi là *liên thông địa phương* nếu với mọi $x \in X$ và bất kỳ một lân cận U của một điểm x thì tồn tại một tập liên thông $C \subset U$ sao cho $x \in \text{Int}C$.

1.1.21. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là *liên thông đường* nếu với mọi cặp điểm x_1, x_2 của X tồn tại một ánh xạ liên tục $f : I \rightarrow X$ đi từ một đoạn đơn vị đóng I tới không gian X thỏa $f(0) = x_1$ và $f(1) = x_2$.

1.1.22. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là *liên thông đường địa phương* nếu với mọi $x \in X$ và bất kỳ một lân cận U của x tồn tại một lân cận V của x sao cho với mọi $y \in V$ tồn tại một ánh xạ liên tục $f : I \rightarrow U$ thỏa $f(0) = x$ và $f(1) = y$.

1.1.23. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là *liên thông cung* nếu với mọi cặp điểm phân biệt x_1, x_2 của X thì tồn tại một đồng phôi nhúng $h : I \rightarrow X$ đi từ một đoạn đơn vị đóng I vào không gian X thỏa $h(0) = x_1$ và $h(1) = x_2$.

1.1.24. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là *liên thông cung địa phương* nếu với mọi $x \in X$ và bất kỳ một lân cận U của x tồn tại một lân cận V của x sao cho với mọi $y \in V \setminus \{x\}$ tồn tại một đồng phôi nhúng $h: I \rightarrow U$ thỏa $h(0) = x$ và $h(1) = y$.

1.1.25. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là *liên thông đơn* nếu nó liên thông đường và với mọi ánh xạ liên tục $f: S^1 = \partial D^2 \rightarrow X$ có thể mở rộng thành $f: D^2 \rightarrow X$ (trong đó D^2 là 2 – đĩa và S^1 là đường tròn biên).

1.1.25. Định nghĩa

Thành phần liên thông *liên thông của một điểm x* trong một không gian tôpô X là hợp của tất cả các không gian con liên thông chứa x của X .

Thành phần liên thông liên thông của hai điểm phân biệt trong không gian tôpô X thì trùng nhau hoặc phân biệt. Do đó mọi thành phần liên thông liên thông tạo thành sự phân tích không gian X thành các tập con liên thông đôi một rời nhau và được gọi là *thành phần liên thông của không gian X* .

1.1.27. Định nghĩa

Thuật ngữ *thành phần hầu liên thông của một điểm x* trong không gian tôpô X dùng để chỉ giao của mọi tập con vừa đóng vừa mở chứa x của X .

Thành phần hầu liên thông là một tập con đóng trong X . Thành phần hầu liên thông của hai điểm phân biệt trong không gian tôpô X thì trùng nhau hoặc phân biệt. Do đó tất cả các thành phần hầu liên thông tạo thành sự phân tích không gian X thành các tập con đóng đôi một rời nhau và được gọi là *thành phần hầu liên thông của không gian X* .

1.1.28. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là *không liên thông di truyền* nếu X không chứa bất kỳ một tập con liên thông nào có số phần tử lớn hơn 1.

Do đó, một không gian X là không liên thông di truyền nếu và chỉ nếu thành phần liên thông của bất kỳ điểm $x \in X$ chỉ chứa chính điểm x . Vì các thành

phần liên thông của không gian là đóng nên mọi không gian không liên thông di truyền là không gian T_1 .

1.1.29. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là 0 – chiều nếu X là một không gian T_1 không rỗng và có một cơ sở gồm các tập vừa đóng vừa mở. Hiển nhiên, mọi không gian 0 – chiều là một không gian Tychonoff.

1.1.30. Định nghĩa

Một không gian tôpô X được gọi là 0 – chiều mạnh nếu X là không gian Tychonoff khác rỗng và mọi phủ hàm mở $\{U_i\}_{i=1}^k$ của X có một lọc mở hữu hạn $\{V_i\}_{i=1}^m$ sao cho $V_i \cap V_j = \emptyset$. Hiển nhiên, lọc $\{V_i\}_{i=1}^m$ gồm các tập vừa đóng vừa mở và do đó là một phủ hàm mở của X .

1.1.31. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là *hoàn toàn không liên thông* nếu cấu trúc thành phần hầu liên thông của bất kỳ điểm $x \in X$ chỉ chứa chính điểm x .

1.1.32. Định nghĩa

Một ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow Y$ là *nhẹ* (0 – chiều) nếu mọi thớ $f^{-1}(y)$ không liên thông di truyền (0 – chiều hoặc rỗng).

1.1.33. Định nghĩa

Cho $f : X \rightarrow Y$ và $g : X \rightarrow Y$ là các ánh xạ liên tục giữa hai không gian tôpô X và Y . Ánh xạ f và g được gọi là *đồng luân* nếu tồn tại một ánh xạ liên tục $H : X \times [0,1] \rightarrow Y$ sao cho $H(x,0) = f(x)$ và $H(x,1) = g(x)$ với mọi $x \in X$.

Ánh xạ H với tính chất như trên được gọi là *phép đồng luân* giữa f và g .

1.1.34. Định nghĩa

Cho X là một không gian Tychonoff và gọi n là ký hiệu cho số nguyên lớn hơn hay bằng -1 . Ta có :

(1) $\dim X \leq n$ nếu mọi phủ hàm mở hữu hạn của X có một lọc hàm mở mà bậc nhỏ hơn hoặc bằng n .

(2) $\dim X = n$ nếu $\dim X \leq n$ và bất đẳng thức $\dim X \leq n-1$ không xảy ra.

(3) $\dim X = \infty$ bất đẳng thức $\dim X \leq n$ không xảy ra với mọi n .

Các điều kiện (1) – (3) được gán cho mọi không gian Tychonoff X mà số $\dim X$ là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng -1 hoặc “số vô hạn” ∞ . Số $\dim X$ được gọi là *chiều Cech – Lebesgue* hay *chiều phủ* của không gian X . Hiển nhiên nếu hai không gian X và Y đồng phôi thì $\dim X = \dim Y$.

Từ định nghĩa chiều phủ ta suy ra ngay $\dim X = -1$ nếu và chỉ nếu $X = \emptyset$ và $\dim X = 0$ khi và chỉ khi X là 0 – chiều mạnh.

1.1.35. Định nghĩa

Cho G là một nhóm abel cố định khác rỗng và với mọi không gian tôpô X ta gọi *chiều đối đồng điều của X theo G* , ký hiệu $\dim_G X$, là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng -1 hay là “số vô hạn” ∞ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

- (1) $\dim_G X = -1$ khi và chỉ khi $X = \emptyset$.
- (2) $\dim_G X \leq n$ trong đó $n = 0, 1, \dots$ nếu $H^{n+i}(X, A; G) = 0$ với mọi tập đóng $A \subset X$ và với mọi $i = -1, 0, 1, \dots$
- (3) $\dim_G X = n$ nếu $\dim_G X \leq n$ và $\dim_G X > n-1$.
- (4) $\dim_G X = \infty$ nếu $\dim_G X > n$ với $n = -1, 0, 1, \dots$

1.1.36. Định nghĩa

Một tập compact X được gọi là *đủ giá trị chiều* nếu $\dim_G X = \dim_{\mathbb{Z}} X$ với mọi nhóm abel G .

1.1.37. Định nghĩa

Một không gian X được gọi là có *tính chất cung phân biệt (DAP)* với mỗi $\varepsilon > 0$ và với hai ánh xạ bất kỳ $f, g: I = [0, 1] \rightarrow X$ tồn tại các ánh xạ

$f', g': I \rightarrow X$ thỏa $f'(I) \cap g'(I) = \emptyset$ và $\hat{\rho}(f, f') < \varepsilon$, $\hat{\rho}(g, g') < \varepsilon$ trong đó $\hat{\rho}$ là chuẩn metric sup cảm sinh bởi metric ρ trong X .

Nếu I trong định nghĩa được thay bởi đĩa n – chiều thì ta có tính chất n – đĩa phân biệt ($DD^n P$)

1.1.38. Định nghĩa

Cho X là một không gian metric. Một ánh xạ liên tục $p: [0, 1] \rightarrow X$ được gọi là một *đường*. Một đường đơn hay một *cung* α là một song ánh liên tục $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$.

1.1.39 Định nghĩa

Một tập X được gọi là một *đường cong đóng đơn* nếu X đồng phôi với tập gồm các điểm nằm trên đường tròn.

1.1.40. Định nghĩa

Một không gian X gọi là được (phân) tách bởi cung α nếu $X \setminus \alpha$ có ít nhất hai thành phần liên thông. Nếu $x, y \in X$ ta nói một cung α tách x từ y nếu α tách X và x, y nằm trong các thành phần liên thông phân biệt của $X \setminus \alpha$.

1.2. Giới hạn ngược, Số p – adic, p – adic solenoid

1.2.1. Định nghĩa

Một *dãy ngược* là một "dãy đôi" $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ của các không gian X_i gọi là các *không gian thành phần liên thông* và các hàm liên tục $f_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$ gọi là các *ánh xạ liên kết*. Ta thường viết dãy ngược như sau:

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{i-1}} X_i \xleftarrow{f_i} X_{i+1} \xleftarrow{f_{i+1}} \dots,$$

Khi đó *giới hạn ngược* của $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ là một không gian con của không gian tích Đêcac $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ xác định như sau:

$$\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i, \forall i \right\}.$$

Trong đó $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ là ký hiệu của giới hạn ngược.

Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ chỉ tập trung giới thiệu cách xây dựng số p -adic cũng như các khái niệm và tính chất liên quan đến nó. Vì thế, chúng ta sẽ không đi sâu vào chứng minh cho các mệnh đề và định lý dưới đây.

1.2.2. Định nghĩa

Cho $0 \neq x \in \mathbb{Z}$. Khi đó *thứ tự p -adic* (hoặc *giá trị p -adic*) của x là

$$\text{ord}_p x = \max \{r : p^r \mid x\}.$$

Trong đó ký hiệu $|$ nghĩa là ước.

Với $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ thì thứ tự p -adic của $\frac{a}{b}$ là

$$\text{ord}_p \frac{a}{b} = \text{ord}_p a - \text{ord}_p b.$$

Lưu ý trong mọi trường hợp thì ord_p luôn cho ta một số nguyên và do đó định nghĩa về thứ tự p -adic cho phân số $\frac{a}{b}$ được nêu trên là tốt, nghĩa là

nếu $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ thì

$$\text{ord}_p a - \text{ord}_p b = \text{ord}_p a' - \text{ord}_p b'.$$

Chúng ta cũng quy ước $\text{ord}_p 0 = \infty$.

1.2.3. Mệnh đề

Cho $x, y \in \mathbb{Q}$. Khi đó ord_p có những tính chất sau đây:

- (a) $\text{ord}_p x = \infty$ nếu và chỉ nếu $x = 0$;
- (b) $\text{ord}_p (xy) = \text{ord}_p x + \text{ord}_p y$;
- (c) $\text{ord}_p (x + y) \geq \min \{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}$.

1.2.4. Định nghĩa

Cho $x \in \mathbb{Q}$. Khi đó *chuẩn p -adic* của x được cho bởi

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\text{ord}_p x} & \text{khi } x \neq 0, \\ p^{-\infty} & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

1.2.5. Mệnh đề

Hàm $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ có các tính chất sau:

- (a) $|x|_p = 0$ nếu và chỉ nếu $x = 0$;
- (b) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$;
- (c) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

1.2.6. Định nghĩa

Vành các số p -adic là sự mở rộng của \mathbb{Q} theo chuẩn p -adic $|\cdot|_p$ được ký hiệu là \mathbb{Q}_p . Chuẩn trên \mathbb{Q}_p cũng được ký hiệu là $|\cdot|_p$.

1.2.7. Định nghĩa

Đơn vị quanh $0 \in \mathbb{Q}_p$ là tập các số nguyên p -adic

$$\mathbb{Z}_p = \{\alpha \in \mathbb{Q}_p : |\alpha|_p \leq 1\}.$$

1.2.8. Mệnh đề

Tập các số nguyên p -adic \mathbb{Z}_p là vành con của \mathbb{Q}_p . Mọi phần tử của \mathbb{Z}_p là giới hạn của một dãy các số nguyên (không âm) và ngược lại mọi dãy Cauchy các số nguyên trong \mathbb{Q} luôn có một giới hạn trong \mathbb{Z}_p .

Bây giờ chúng ta sẽ đi mô tả các phần tử của \mathbb{Q}_p một cách rõ ràng bằng cách dùng khai triển chữ số p -adic. Chúng ta bắt đầu với các phần tử trong \mathbb{Z}_p . Từ 1.2.7 ta suy ra có một số nguyên α_0 thỏa điều kiện

$$|\alpha_0 - \alpha|_p < 1, \quad 0 \leq \alpha \leq (p-1).$$

Số nguyên p -adic $\alpha - \alpha_0$ có chuẩn $\leq 1/p$ và do đó số p -adic $(\alpha - \alpha_0)/p$ nằm trong \mathbb{Z}_p . Lặp lại bước cuối chúng ta thu được một số nguyên α_1 thỏa

$$|\alpha - (\alpha_0 + \alpha_1 p)|_p < \frac{1}{p}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq (p-1).$$

Cứ tiếp tục như vậy thì ta sẽ có một dãy các số nguyên α_n thỏa

$$|\alpha - (\alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_n p^n)|_p < \frac{1}{p^n}, \quad 0 \leq \alpha_n \leq (p-1).$$

Dãy (β_n) trong đó

$$\beta_n = \alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_n p^n$$

là dãy Cauchy theo chuẩn $|\cdot|_p$. Hơn nữa, giới hạn của nó là α do

$$|\alpha - \beta_n|_p < \frac{1}{p^n}.$$

Như vậy chúng ta có một khai triển

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \cdots$$

gọi lại khai triển thập phân của một số thực nhưng với vô số các lũy thừa có thể có của p . Đó là *khai triển p -adic (chuẩn tắc)* của $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ và các α_n được gọi là *chữ số p -adic (chuẩn tắc)*. Khai triển này có sự khác biệt về tính *duy nhất* so với khai triển thập phân. Để thấy điều này, ta giả sử

$$\alpha = \alpha'_0 + \alpha'_1 p + \alpha'_2 p^2 + \cdots$$

là một khai triển p -adic thứ hai của α thỏa các tính chất như khai triển thứ nhất. Gọi d là số nguyên đầu tiên sao cho $\alpha_d \neq \alpha'_d$. Không mất tổng quát ta có thể giả sử $\alpha_d < \alpha'_d$ và do đó $1 \leq \alpha'_d - \alpha_d \leq (p-1)$. Nếu

$$\beta'_n = \alpha'_0 + \alpha'_1 p + \cdots + \alpha'_n p^n$$

thì

$$\beta'_d - \beta_d = (\alpha'_d - \alpha_d) p^d.$$

Do đó

$$|\beta'_d - \beta_d|_p = \frac{1}{p^d}.$$

Lưu ý

$$\begin{aligned} |\beta'_d - \beta_d|_p &= |(\beta'_d - \alpha) + (\alpha - \beta_d)|_p \\ &\leq \max\{|\beta'_d - \alpha|_p, |\alpha - \beta_d|_p\} \\ &< \frac{1}{p^d}, \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn với đẳng thức cuối. Do đó không có d nào tồn tại và vì vậy chỉ có duy nhất một khai triển.

Bây giờ với $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ là một số p -adic bất kỳ. Khi $|\alpha|_p \leq 1$ thì chúng ta đã biết cách tìm khai triển p -adic của nó. Nếu $|\alpha|_p > 1$ thì ta giả sử $|\alpha|_p = p^k$ với $k > 0$. Xét $\beta = p^k \alpha$ với $|\beta|_p = 1$ thì β có một khai triển p -adic

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots$$

như phía trên. Khi đó

$$\alpha = \frac{\beta_0}{p^k} + \frac{\beta_1}{p^{k-1}} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{p} + \beta_k + \beta_{k+1} p + \dots + \beta_{k+r} p^r + \dots$$

trong đó $0 \leq \beta_n \leq (p-1)$ với mỗi n .

Những lập luận nêu trên cho ta một kết quả quan trọng.

1.2.9. Định lý

Mọi số p -adic $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ đều có một khai triển p -adic duy nhất

$$\alpha = \alpha_{-r} p^{-r} + \alpha_{1-r} p^{1-r} + \alpha_{2-r} p^{2-r} + \dots + \alpha_{-1} p^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots$$

với $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ và $0 \leq \alpha_n \leq (p-1)$. Hơn nữa, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ khi và chỉ khi $\alpha_{-r} = 0$ với bất kỳ $r > 0$.

Chúng ta có thể tính toán trong \mathbb{Q}_p theo cách tương tự được dùng trong \mathbb{R} với khai triển thập phân.

1.2.10 Ví dụ

Tính

$$(1/3 + 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots) + (2/3^2 + 0/3 + 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + \dots).$$

Cách làm là chúng ta sẽ bắt đầu từ bên trái và tiến dần về bên phải. Do đó, nếu kết quả là

$$\alpha = a_{-2}/3^2 + a_{-1}/3 + a_0 + a_1 3 + \dots$$

thì

$$a_{-2} = 2, \quad a_{-1} = 1, \quad a_0 = 2 + 1 = 0 + 1 \cdot 3 \equiv 0,$$

và cứ thực hiện như vậy

$$a_1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 \cdot 3 \equiv 2$$

trong đó 1 được lấy từ số hạng 3^0 . Tiếp tục ta có

$$a_2 = 0 + 1 + 1 = 2, \quad a_3 = 2 + 1 = 0 + 1 \cdot 3 \equiv 0,$$

và do đó ta có

$$\alpha = 2/3^2 + 1/3 + 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3^3 + \dots.$$

Lưu ý là khai triển p -adic của một số p -adic là duy nhất trong khi khai triển thập phân của một số thì lại không duy nhất.

Ví dụ $0.999\dots = 1.000\dots = 1$.

1.2.11. Định nghĩa

Với mỗi $p = 2, 3, \dots$ xét $f^p : S^1 \rightarrow S^1$ được cho bởi $f^p(z) = z^p$ với mỗi $z \in S^1$ (ở đây S^1 là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng và z^p ký hiệu lũy thừa p của z). Với mỗi p cho trước, đặt:

$$\sum_p = \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ trong đó } X_i = S^1 \text{ và } f_i = f^p \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots$$

Ta có mỗi \sum_p với $p \geq 2$ là một continuum không phân tích được và được gọi là p -adic solenoid.

1.3. Ánh xạ phủ, Phép nâng, Tập bất biến

1.3.1. Định nghĩa

Cho X, Y là các không gian tôpô và $p: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ liên tục. Một tập mở U của Y gọi là *được phủ đều* bởi ánh xạ p nếu và chỉ nếu $p^{-1}(U)$ là hợp các tập mở rời nhau của X mà mỗi tập này lại đồng cấu lên U qua p . Ánh xạ $p: X \rightarrow Y$ được gọi là một *ánh xạ phủ* nếu $p: X \rightarrow Y$ là toàn ánh và mọi điểm của X được chứa trong những tập mở được phủ đều bởi ánh xạ p .

Nếu $p: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ phủ thì ta nói X là một *không gian phủ* của Y .

1.3.2. Ví dụ

Cho S^1 là đường tròn đơn vị trong \mathbb{R}^2 thì ánh xạ $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ xác định bởi

$$p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

là ánh xạ phủ.

Thật vậy, lấy \mathbf{n} là một điểm trên S^1 . Xét tập mở U trong S^1 chứa \mathbf{n} như sau $U = S^1 \setminus \{-\mathbf{n}\}$ thì ta có $\mathbf{n} = (\cos 2\pi t_0, \sin 2\pi t_0)$ với $t_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó $p^{-1}(U)$ là hợp các tập mở rời nhau J_n với n là các số nguyên:

$$J_n = \left\{ t \in \mathbb{R} : t_0 + n - \frac{1}{2} < t < t_0 + n + \frac{1}{2} \right\}$$

Mỗi tập J_n lại đồng cấu lên U qua ánh xạ p . Điều này chỉ ra $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ là ánh xạ phủ.

1.3.3. Ví dụ

Ánh xạ $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ xác định bởi $p(z) = \exp(z)$ là một ánh xạ phủ.

Thật vậy, với bất kỳ $\theta \in [-\pi, \pi]$ ta định nghĩa:

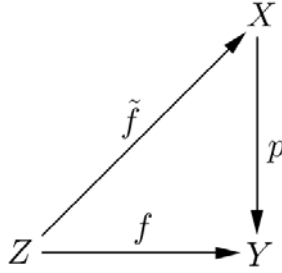
$$U_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(-z) \neq \theta\}.$$

Khi đó $p^{-1}(U_\theta)$ là hợp các tập mở rời nhau $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z - \theta - 2\pi n| < \pi\}$ với mọi số nguyên n và mỗi tập này qua p lại đồng cấu lên U_θ . Do đó U_θ được phủ đều bởi ánh xạ p .

1.3.4. Định nghĩa

Cho $p : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ phủ lên không gian tôpô X . Với Z là một không gian tôpô và gọi $f : Z \rightarrow Y$ là một ánh xạ liên tục. Một ánh xạ liên tục $\tilde{f} : Z \rightarrow X$ được gọi là một *phép nâng* của ánh xạ f nếu và chỉ nếu $p \circ \tilde{f} = f$.

Ta có sơ đồ giao hoán sau :



1.3.5. Định nghĩa

Cho một nhóm G tác động lên X và lấy $x \in X$. Khi đó *quỹ đạo* của x , ký hiệu \mathcal{O}_x , là tập hợp xác định như sau:

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

1.3.6. Định nghĩa

Một tập $\mathcal{M} \subseteq \Omega$ được gọi là *bất biến* qua φ nếu nó chứa một quỹ đạo đầy đủ của mọi điểm trong \mathcal{M} . Nói cách khác, với mọi $x \in \mathcal{M}$ và với mọi $t \in \mathbb{R}$ thì $\varphi(t, x) \in \mathcal{M}$.

Chương 2. PHÂN HOẠCH

Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm cũng như tính chất của sự phân hoạch một tập. Nhưng trước hết, chúng ta sẽ trình bày một khái niệm được nêu bởi Sierpinski và sau này được R. L. Moore dùng và được ông gọi là tính chất S .

2.1. Tính chất S

2.1.1. Định nghĩa

Một tập M được gọi là có *tính chất S* nếu thỏa với mỗi $\varepsilon > 0$, M là hợp của hữu hạn các tập liên thông có đường kính nhỏ hơn ε .

2.1.2. Mệnh đề

Nếu M có tính chất S thì nó liên thông địa phương.

Chứng minh.

Lấy x là một điểm bất kỳ trong M . Với mọi số dương ε , đặt $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ trong đó $\delta(M_i) < \varepsilon/2$ ($\delta(M_i)$ là đường kính tập M_i). Lấy K là hợp của những tập M_i chứa x hoặc nhận x làm điểm giới hạn. Khi đó K liên thông và $\delta(K) < \varepsilon$. Do x không là điểm giới hạn của $M \setminus K$ nên nó chỉ ra M liên thông địa phương tại x . ■

2.1.3. Định nghĩa

Một tập M được gọi là *liên thông địa phương đều* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một $\delta_\varepsilon > 0$ thỏa với x, y là hai điểm bất kỳ trong một tập con liên thông có đường kính nhỏ hơn ε của M thì khoảng cách giữa x và y nhỏ hơn δ_ε .

Từ định nghĩa ta thấy liên thông địa phương đều thì liên thông địa phương. Điều ngược lại chỉ đúng khi tập là compact.

2.1.4. Mệnh đề

Mọi tập M compact liên thông địa phương thì liên thông địa phương đều.

Chứng minh.

Giả sử ngược lại, M không liên thông địa phương đều thì với $\varepsilon > 0$, với mọi số thực dương n thì tồn tại hai điểm x_n và y_n của M thỏa $\rho(x_n, y_n) < 1/n$ nhưng không nằm trong tập con liên thông có đường kính nhỏ hơn ε của M . Do M compact nên dãy $\{x_n\}$ chứa một dãy con $\{x_{n_i}\}$ hội tụ về điểm p của M . Hiển nhiên dãy $\{y_{n_i}\}$ cũng hội tụ về p do $\rho(x_{n_i}, y_{n_i}) < 1/n_i \leq 1/i$. Nhưng vì M liên thông địa phương tại p nên tồn tại δ sao cho $V_\varepsilon(p)$ nằm trong một miền R có đường kính nhỏ hơn ε . Hơn nữa, với n_i đủ lớn thì $x_{n_i} \cup y_{n_i} \subset R$ mâu thuẫn với định nghĩa x_{n_i} và y_{n_i} . Vậy M liên thông địa phương đều. ■

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra tập liên thông địa phương đều cùng với điều kiện compact thì mạnh hơn so với tính chất S . Đầu tiên ta có một ví dụ với C là đường tròn và p là một điểm trên C thì tập $C \setminus \{p\}$ có tính chất S nhưng không liên thông địa phương đều. Nghĩa là một tập có thể có tính chất S nhưng chưa hẳn là liên thông địa phương đều.

2.1.5. Mệnh đề

Mọi tập M compact và liên thông địa phương đều thì có tính chất S .

Chứng minh.

Với số dương ε bất kỳ, lấy $\delta > 0$ thỏa với hai điểm x và y bất kỳ cùng nằm trong một tập con liên thông đường kính nhỏ hơn $\varepsilon/3$ của M thì $\rho(x, y) < \delta$. Đặt $P = p_1 \cup p_2 \cup \dots$ thì P là tập đếm được trù mật trong M (tức là $\bar{P} \supset M$). Với mỗi n , gọi R_n là tập tất cả các điểm trong M có tính chất là cùng nằm với p_n trong một tập con liên thông của M có đường kính nhỏ hơn $\varepsilon/3$. Khi đó R_n liên thông và $\delta(R_n) < \varepsilon$ với mỗi n . Bây giờ ta chỉ ra có một k

nào đó để $M = \bigcup_1^k R_n$. Giả sử ngược lại, tồn tại một dãy vô hạn $\{p_{n_i}\}$ các điểm trong P thỏa với mỗi i thì p_{n_i} không nằm trong $\bigcup_1^{n_{i-1}} R_n$. Do M compact nên $\{p_{n_i}\}$ có điểm giới hạn p . Nhưng khi đó với hai điểm p_{n_s} và p_{n_r} ($s > r$) thỏa $\rho(p_{n_r}, p_{n_s}) < \delta$ thì $p_{n_s} \subset R_{n_r} \subset \bigcup_1^{n_{s-1}} R_n$ mâu thuẫn với định nghĩa của $\{p_{n_i}\}$. Vì vậy, có một số k sao cho $M = \bigcup_1^k R_n$ nên M có tính chất S . ■

Hai mệnh đề trên cho ta thiết lập một đặc trưng của continuum liên thông địa phương.

2.1.6. Định lý

Điều kiện cần và đủ để một continuum M liên thông địa phương là M có tính chất S .

Chứng minh.

Sử dụng 2.1.4. ta có mọi continuum liên thông địa phương thì liên thông địa phương đều và do đó dùng 2.1.5. ta có M có tính chất S .

Ngược lại từ 2.1.2. ta có mọi tập có tính chất S thì liên thông địa phương.

■

2.2. Phân hoạch

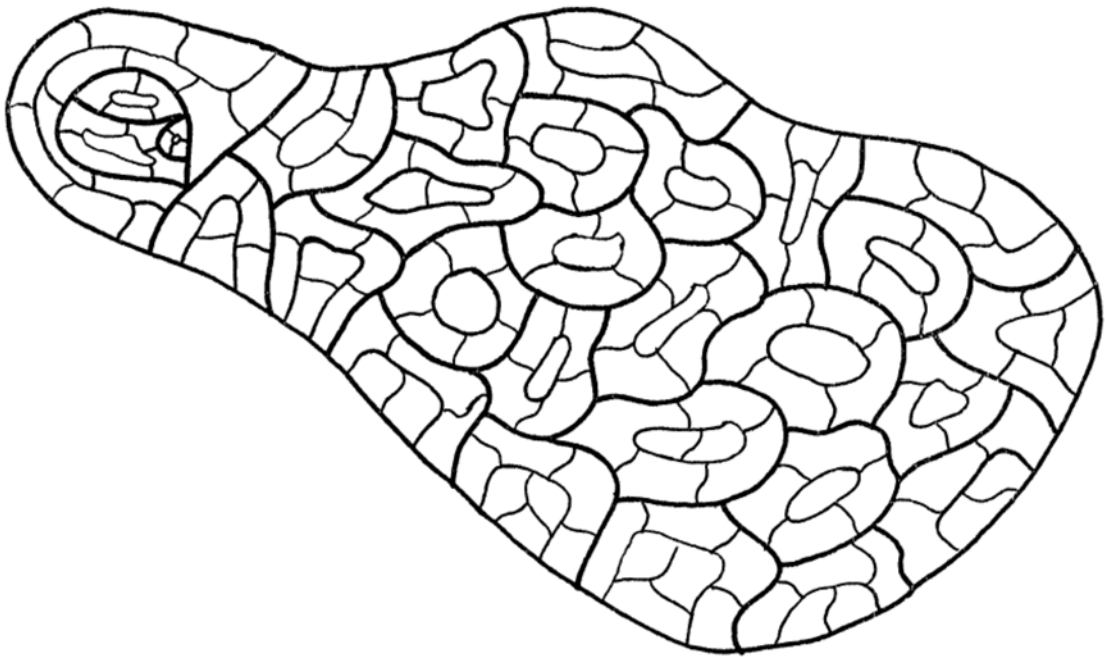
Qua những kiến thức giải tích cơ bản đã học, ta đều biết tích phân $\int_a^b f(x)dx$ có thể được tính thông qua giới hạn $\lim \sum f(\xi_i)\Delta x_i$. Việc chia một đoạn từ a đến b thành hữu hạn thành phần liên thông với độ dài Δx_i được gọi là phân hoạch một đoạn từ a đến b . Các thành phần liên thông như vậy được gọi là một phân hoạch. Tương tự, phân hoạch có thể được dùng trong tính tích phân trên các tập tùy ý. Phân hoạch cung cấp cho chúng ta một cơ sở phép đo tiêu chuẩn trên các khoảng của hàm dưới dấu tích phân. Sau đây, chúng ta sẽ xác

định phân hoạch trên các tập mà không dùng các đơn vị của độ đo như độ dài, diện tích hay thể tích.

2.2.1. Định nghĩa

Một tập M gọi là *phân hoạch được* nếu với mỗi số dương ε có một họ hữu hạn G các tập con liên thông mở loại trừ lẫn nhau (không chồng lên nhau) của M thỏa mỗi phần tử của G có đường kính nhỏ hơn ε và hợp của các phần tử này là trù mật trong M .

Khi đó ta gọi G là một ε – phân hoạch của M .



Hình 2.2.1.

2.2.2. Định nghĩa

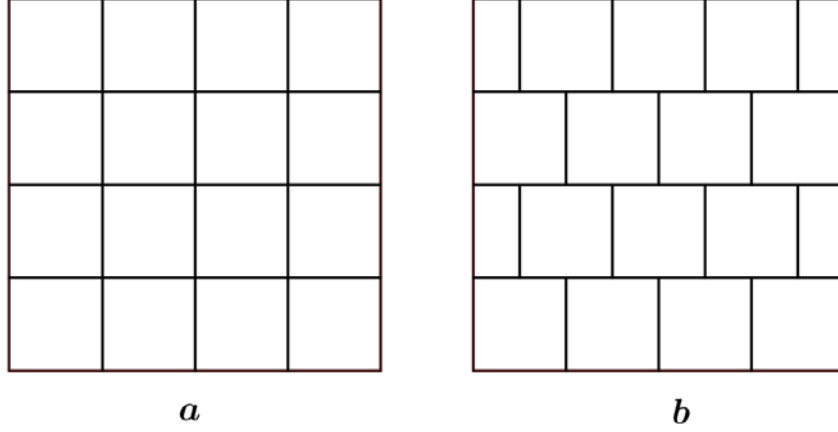
Cho G và H là hai phân hoạch của M . Ta nói G là *lọc* của H nếu mỗi phần tử của G là tập con của một phần tử trong H .

Trong Hình 2.2.1. phân hoạch được biểu diễn bởi các đường nhạt là lọc của phân hoạch biểu diễn bằng các đường đậm.

2.2.3. Định nghĩa

Phân hoạch U là một *phân hoạch khối* nếu mỗi phần tử của U là liên thông đều địa phương và là phần trong của bao đóng của chính nó.

Hơn nữa, phần trong bao đóng của hai phần tử kề nhau trong U là liên thông và liên thông đều địa phương .



Hình 2.2.2.

Trong Hình 2.2.2. thì b là phân hoạch khối.

2.2.4. Định nghĩa

Một phân hoạch khối V được gọi là một *lọc chính* của phân hoạch khối U nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) V là một lọc của U .
- (ii) Với mỗi cặp phần tử kề nhau u', u'' trong U thì trong V có tương ứng hai phần tử v', v'' kề nhau thỏa $\bar{v}' \cup \bar{v}''$ là tập con của phần trong $\bar{u}' \cup \bar{u}''$.
- (iii) Với $u \in U$, các phần tử của V nằm trong u có thể được sắp thứ tự là v_0, v_1, \dots, v_n sao cho \bar{v}_0 cắt mỗi \bar{v}_i và \bar{v}_i lại cắt biên của u nếu và chỉ nếu $i > 0$.

Ta gọi v_0 là *phần tử chính* và v_1, v_2, \dots, v_n là các *phần tử biên*.

Nếu B là một tập con và G là họ các tập con của X thì ta gọi $S(B, G)$ là phần trong của bao đóng hợp các phần tử của G mà có điểm giới hạn nằm trên \bar{B} .

Sau đây, chúng ta giả sử các không gian đều có một mêtric $D(x, y)$.

2.2.5. Bổ đề

Với mỗi tập liên thông M có tính chất S ta luôn tìm được một continuum compact liên thông địa phương H và một đồng phôi T đi từ M vào một tập con trù mật H' của H thỏa đường kính của mỗi tập con liên thông X của M bằng với đường kính của $T(X)$ và với mỗi tập con mở, liên thông M của H thì $T^{-1}(R \cdot H')$ liên thông.

Chứng minh.

[9]. ■

2.2.6. Bổ đề

Nếu M là một tập liên thông có tính chất S , H và K là các tập con của M cách nhau một khoảng dương thì có một họ hữu hạn các tập con mở, liên thông, loại trừ lẫn nhau của M thỏa hợp của họ này trù mật trong M , không có phần tử nào trong họ cùng cắt H và K ; hơn nữa, bất kì một phần tử nào trong họ mà cắt K thì có tính chất S .

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh bổ đề cho trường hợp M đóng và compact. Trường hợp tổng quát suy từ 2.2.5.

Lấy H' và K' là hai tập cách nhau một khoảng dương chứa H và K tương ứng sao cho mỗi điểm trong M thuộc một cung có đường kính nhỏ hơn $1/2$ cắt $H' \cup K'$. Ký hiệu H_1 (hoặc K_1) là tập tất cả các điểm nằm trong một tập con liên thông của M cắt H' (hoặc K') và có đường kính nhỏ hơn $D(H', K')/3$. Ta lưu ý rằng H_1 và K_1 chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông.

Gọi W là họ hữu hạn các điểm của M thỏa mỗi điểm thuộc một cung trong M có đường kính nhỏ hơn $1/4$ và cắt W . Khi đó có một họ hữu hạn các cung A mà mỗi phần tử của A nằm trong $M \setminus \bar{K}_1$ cắt H_1 và A^* (là hợp các phần tử của A) chứa mỗi điểm trong W thuộc một thành phần liên thông của

$M \setminus \bar{K}_1$ cắt H_1 . Lấy B là họ hữu hạn các cung thỏa $A^* \cup B^*$ chứa W và mỗi phần tử của B có đường kính nhỏ hơn $1/2$, nằm trong $M \setminus (\bar{H}_1 \cup A^*)$ và cắt K_1 .

Ký hiệu H_1 (hoặc K_2) là tập tất cả các điểm thuộc một tập con liên thông trong M mà cắt $H_1 \cup A^*$ (hoặc $K_1 \cup B^*$) và có đường kính nhỏ hơn $D(H_1 \cup A^*, K_1 \cup B^*)/3$. Ta lưu ý rằng mỗi điểm của K_2 thuộc một tập con liên thông của K_2 cắt K_1 và có đường kính nhỏ hơn $1/2 + 1/6$.

Tương tự, tồn tại các tập mở $H_3, K_3, H_4, K_4, \dots$ trong M sao cho :

- (1) H_i và K_i cách nhau một khoảng dương.
- (2) H_{i+1} và K_{i+1} chứa \bar{H}_i và \bar{K}_i tương ứng.
- (3) Mỗi thành phần liên thông của H_{i+1} chứa một thành phần liên thông của H_i .
- (4) Mỗi điểm của K_{i+1} nằm trong một tập con liên thông của K_{i+1} cắt K_i và có đường kính nhỏ hơn $1/2^i + 1/(3 \cdot 2^i)$.
- (5) Mỗi điểm của M nằm trong một cung có đường kính nhỏ hơn $1/2^i$ cắt $H_i \cup K_i$.

Bây giờ ta có $\bigcup (H_i \cup K_i)$ trù mật trong M và chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông đồng thời $\bigcup K_i$ có tính chất S . ■

2.2.7. Định lý

Điều kiện cần và đủ để một tập M có thể phân hoạch được là nó phải có tính chất S .

Chứng minh.

Điều kiện cần là hiển nhiên. Ta chứng minh điều kiện đủ:

Để chỉ ra M phân hoạch được thì ta cần chứng minh mỗi một thành phần liên thông C của M phân hoạch được.

Lấy (p_1, p_2, \dots, p_n) là một họ hữu hạn các điểm trong C sao cho mỗi điểm của M cách $\bigcup p_i$ một khoảng nhỏ hơn $\varepsilon/4$. Gọi H_i là tập tất cả các điểm trong C mà cách p_i một khoảng nhỏ hơn $\varepsilon/4$ và K_i là tập những điểm cách p_i một khoảng lớn hơn $\varepsilon/2$.

Dùng 2.2.6. ta có hai tập con mở liên thông loại trừ lẫn nhau của C là U_1 và V_1 thỏa $U_1 \cup V_1$ trù mật trong C , U_1 có hữu hạn các thành phần liên thông và chứa H_1 , V_1 có tính chất S và chứa K_1 . Hơn nữa, ta có hai tập con mở của V_1 là U_2 và V_2 thỏa $U_2 \cup V_2$ trù mật trong V_1 , U_2 chứa $V_1 \cap H_2$ và có hữu hạn các thành phần liên thông, đồng thời V_2 chứa $V_1 \cap K_2$ và có tính chất S . Tương tự, ta xác định được các tập $U_3, V_3, U_4, V_4, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}$. Các thành phần liên thông của $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{n-1} \cup V_{n-1}$ là một số hữu hạn, mỗi thành phần liên thông có đường kính nhỏ hơn ε và hợp của chúng trù mật trong M . Do đó tập M phân hoạch được. ■

Chương 3. CONTINUUM PEANO DƯỚI TÁC ĐỘNG NHÓM P – ADIC

3.1. Định nghĩa và ký hiệu

3.1.1. Định nghĩa

Không gian X được gọi là *continuum Peano* nếu nó là một không gian metric compact, liên thông và liên thông địa phương.

Continuum Peano có những đặc tính của một cung nên ta thường xét continuum Peano như là một đường cong liên tục.

3.1.2. Định nghĩa

Một tác động của nhóm G với phần tử đơn vị e vào không gian X được gọi là *hiệu quả* nếu và chỉ nếu với mọi $g \in G \setminus \{e\}$, tồn tại một điểm $x \in X$ sao cho $g(x) \neq x$.

3.1.3. Định nghĩa

Một tác động của nhóm G với phần tử đơn vị e vào không gian X được gọi là *tự do* nếu và chỉ nếu với mọi $g \in G \setminus \{e\}$ và với mọi điểm $x \in X$ ta có $g(x) \neq x$.

3.1.4. Định nghĩa

Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là k – *phần tử* nếu với mỗi $y \in Y$ thì tập $f^{-1}(y)$ có đúng k phần tử.

Với \mathbb{Z} và \mathbb{N} theo thứ tự là các tập số nguyên và số nguyên dương. Đặt $\mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên có môđun $k \in \mathbb{N}$.

3.1.5. Định nghĩa

Với số nguyên tố p cho trước, một nhóm p – adic là một nhóm aben $A_p := \varprojlim \{\mathbb{Z}_{p^n}, \phi_n^{n+1}\}$ trong đó các ánh xạ $\phi_n^{n+1} : \mathbb{Z}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$ là những đồng cấu nhóm thu được khi lấy môđun p^n .

Hơn nữa, ta có thể dùng tôpô của nhóm Cantor cho các số p – adic. Hơn nữa, các số này cũng có tôpô cảm sinh được từ một phần tử đơn. Khi cần thiết ta chọn một phần tử $\tau \in A_p$ làm phần tử cảm sinh tôpô trong A_p . Ngoài ra, các nhóm con không tầm thường của A_p có thể được viết dưới dạng $\tau^{p^k} A_p$ với $k \in \mathbb{N}$ (những nhóm con này hoàn toàn độc lập với cách chọn τ). Ký hiệu $\Delta^k := \tau^{p^k} A_p$ là nhóm con của A_p với chỉ số p^k .

Khi A_p tác động lên không gian X thì một cách tự nhiên sinh ra hệ các ánh xạ $\{p_n : X/\Delta^n \rightarrow X/\Delta^{n-1}\}$:

$$X \cdots \xrightarrow{p_5} X/\Delta^4 \xrightarrow{p_4} X/\Delta^3 \xrightarrow{p_3} X/\Delta^2 \xrightarrow{p_2} X/\Delta^1 \xrightarrow{p_1} X/A_p.$$

Ánh xạ $p_n : X/\Delta^n \rightarrow X/\Delta^{n-1}$ cảm sinh từ đồng cấu ϕ_{n-1}^n . Nếu A_p tác động tự do thì mỗi ánh xạ p_n là một ánh xạ phủ p – phần tử. Khi A_p chỉ tác động một cách thông thường lên X thì trong các ánh xạ p_n chỉ có một số là ánh xạ phủ phân nhánh. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta đặt $P_n := p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_{n-1} \circ p_n$ thì khi đó P_n là ánh xạ phủ phân nhánh p^n – phần tử. Đặt $\pi_0 : X \rightarrow X/A_p$ là ánh xạ thương sinh từ tác động của A_p và với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có $\pi_n : X \rightarrow X/\Delta^n$ là ánh xạ thương thu được từ tác động của nhóm con Δ^n . Khi đó các ánh xạ vừa nêu trên thỏa mãn hệ thức $P_n \circ \pi_n = \pi_0$.

3.2. Phân hoạch đẳng biến của continuum Peano

Ta bắt đầu bằng một định lý của R. H. Bing:

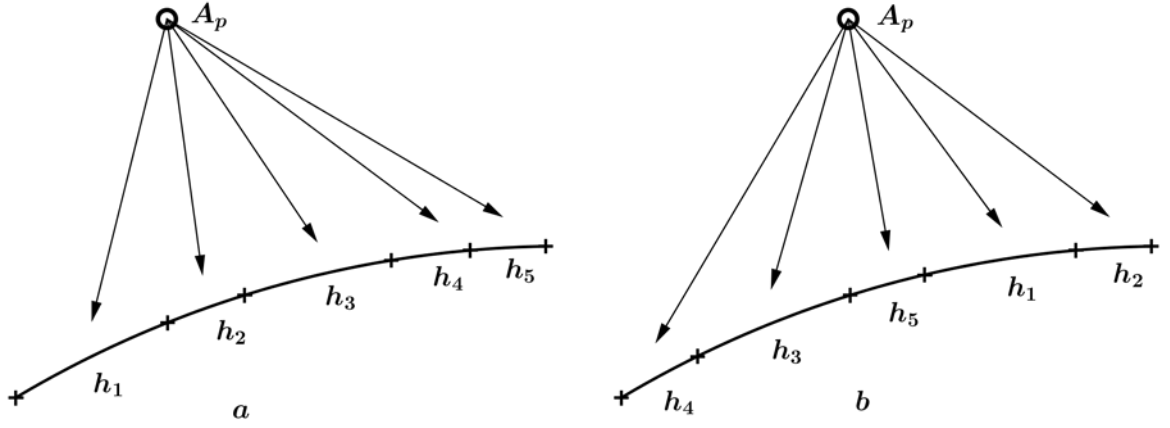
3.2.1. Định lý

Mọi continuum Peano đều có thể phân hoạch được.

Chứng minh.

Theo 2.1.5. ta có continuum Peano có tính chất S và từ đó nó phân hoạch được do 2.2.7. ■

Do đó, nếu có một nhóm p – adic tác động hiệu quả lên một continuum Peano X thì một câu hỏi được đặt ra là tác động này sẽ mang đến tính chất gì mới cho các phân hoạch của continuum Peano X . Dưới đây, chúng ta sẽ chứng minh với mọi $\varepsilon > 0$ thì X có thể được chia bởi các tập phân hoạch có đường kính nhỏ hơn ε sao cho tác động nhóm hoán vị hữu hạn các tập này.



Hình 3.2.1.

3.2.2. Định lí

Nếu $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ hoàn chỉnh thì với mọi tập con compact $Z \subset Y$ ta có ảnh ngược $f^{-1}(Z)$ compact.

Chứng minh.

Hiển nhiên ta có $f^{-1}(Z)$ là một không gian Hausdorff. Do đó với bất kỳ họ các tập mở $\{U_s\}_{s \in S}$ của X mà hợp của chúng chứa $f^{-1}(Z)$ thì tồn tại một tập hữu hạn $S_0 \subset S$ sao cho $f^{-1}(Z) \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s$. Lấy τ là họ các tập con hữu hạn của S và $U_T = \bigcup_{s \in T} U_s$ trong đó $T \in \tau$ thì với mỗi $z \in Z$ ta có $f^{-1}(z)$ là compact và được chứa trong tập U_T với các $T \in \tau$. Điều này chỉ ra $z \in Y \setminus f(X \setminus U_T)$, từ đó

$Z \subset \bigcup_{T \in \tau} (Y \setminus f(X \setminus U_T))$. Vì các tập $Y \setminus f(X \setminus U_T)$ là các tập mở nên tồn tại

$T_1, T_2, \dots, T_k \in \tau$ sao cho $Z \subset \bigcup_{i=1}^k (Y \setminus f(X \setminus U_{T_i}))$. Do đó

$$\begin{aligned} f^{-1}(Z) &\subset \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_{T_i})) = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus f^{-1}f(X \setminus U_{T_i})) \subset \\ &\subset \bigcup_{i=1}^k (X \setminus (X \setminus U_{T_i})) = \bigcup_{i=1}^k U_{T_i} = \bigcup_{s \in S_0} U_s, \end{aligned}$$

Trong đó $S_0 = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$.

Vậy $f^{-1}(Z)$ compact. ■

3.2.3. Bổ đề

Cho X và Y là các không gian mêtric liên thông, liên thông địa phương và $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ mở, nhẹ, hoàn chỉnh. Nếu $U \subset Y$ mở thỏa \bar{U} compact và liên thông địa phương thì $V := f^{-1}(U)$ có hữu hạn các thành phần liên thông.

Chứng minh.

Ta có f liên tục nên $V \subset X$ là tập mở.

Lấy $y \in U$, vì X liên thông địa phương nên với mỗi $x \in W := f^{-1}(y) \subset V$ ta có tập mở liên thông $O_x \subset V$. Do f là ánh xạ hoàn chỉnh nên theo định nghĩa W là tập compact. Khi đó họ $\{O_x\}$ là một phủ mở của W nên nó có một họ con hữu hạn các tập mở O_{x_i} phủ W . Hơn nữa, mỗi tập O_{x_i} liên thông nên V có hữu hạn các thành phần liên thông chứa các điểm của W . Ngoài ra, các thành phần liên thông lại là các tập đóng rời nhau. Từ đó suy ra mỗi thành phần liên thông là tập vừa đóng vừa mở trong V .

Ta cần chứng minh ảnh của các thành phần liên thông này nằm trong U . Thật vậy, do f là ánh xạ mở nên ảnh mỗi thành phần liên thông là mở. Tương tự, vì f hoàn chỉnh nên f là ánh xạ đóng do đó ảnh của mỗi thành phần liên thông đều là đóng. Do U liên thông nên ảnh của các thành phần liên thông phủ toàn bộ U .

Do đó tạo ảnh V chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông. ■

3.2.4. Định lý

Cho X và Y là các không gian metric liên thông, liên thông địa phương và $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ mở, nhẹ, hoàn chỉnh. Nếu $U \subset Y$ mở thỏa \bar{U} compact và liên thông địa phương thì $f^{-1}(\bar{U})$ cũng compact và liên thông địa phương.

Chứng minh.

Từ 3.2.2. ta có tạo ảnh $V := f^{-1}(\bar{U})$ là compact. Để chứng minh V liên thông địa phương thì từ 2.1.6. ta chỉ cần chứng minh nó có tính chất S là đủ. Mặt khác, theo 2.2.7. thì điều này lại tương đương với V là phân hoạch được. Do đó chúng ta sẽ đi chứng minh V phân hoạch được.

Do \bar{U} compact và liên thông địa phương nên \bar{U} có tính chất S và do đó \bar{U} phân hoạch được. Gọi $G := \{g_i\}$ là một phân hoạch của \bar{U} . Áp dụng 3.2.3. ta có họ hữu hạn $\{h \subset V \mid h \text{ là một thành phần liên thông của } f^{-1}(g_i), \text{ với } g_i \in G\}$ xác định một phân hoạch H của V . Do đó để chứng minh V phân hoạch được thì ta cần chứng minh kích thước các phần tử trong phân hoạch của V là có thể điều chỉnh được.

Chọn $y \in \bar{U}$. Do f là ánh xạ nhẹ nên $f^{-1}(y)$ là tập 0 chiều vì thế hoàn toàn gián đoạn (không liên thông) nên có cơ sở là các tập vừa đóng vừa mở. Khi đó do f là ánh xạ hoàn chỉnh nên $f^{-1}(y)$ compact nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta phủ $f^{-1}(y)$ bằng một số hữu hạn các tập mở rời nhau có đường kính nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{3}$. Ta ký hiệu phủ mở này là $\{J_i\}$.

Xét một lân cận mở $K_y := \bigcap f(J_i)$ của y (do f mở nên ảnh $f(J_i)$ mở). Do f là ánh xạ liên tục nên ta có tập $f^{-1}(K_y) \subset \bigcup J_i$ là tập mở chứa các điểm

$f^{-1}(y)$. Hơn nữa, từ cách phủ $f^{-1}(y)$ ta có các thành phần liên thông của $f^{-1}(K_y)$ có đường kính nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{3}$.

Do y được chọn tùy ý trong \bar{U} nên nó xác định một phủ mở $\{K_y\}_{y \in \bar{U}}$ của \bar{U} . Vì \bar{U} compact nên $\{K_y\}$ có một phủ con hữu hạn được ký hiệu là $\{K_i\}$. Gọi $\delta > 0$ là khoảng cách nhỏ nhất của các phần tử không giao nhau của phủ đóng hữu hạn $\{\bar{K}_i\}$.

Lấy G là một δ -phân hoạch của \bar{U} và H là phân hoạch liên kết với V qua ánh xạ f . Ta chứng minh khi đó $\delta \leq \varepsilon$. Thật vậy, do bất kỳ $g \in G$ đều nằm trong tập sao của phủ con hữu hạn $\{\bar{K}_i\}$ nên họ H tối đa chỉ là một ε -phân hoạch của V .

Vì ε tùy ý nên tập V là phân hoạch được do đó V có tính chất S suy ra $f^{-1}(\bar{U})$ liên thông địa phương. ■

Trong trường hợp đặc biệt nhóm p -adic tác động lên một continuum Peano, khi đó 3.2.4. và 3.2.3. cung cấp các công cụ để xây dựng phân hoạch đẳng biến. Chúng ta sẽ thấy trong hệ quả dưới đây mọi tác động p -adic hiệu quả lên continuum Peano thì nhận được một dãy lọc các phân hoạch mà mỗi phần tử của lọc này có tương ứng một tác động hữu hạn.

2.2.5. Hệ quả (Phân hoạch đẳng biến)

Nếu nhóm p -adic A_p tác động hiệu quả lên continuum Peano X thì với mọi $\varepsilon > 0$ có một ε -phân hoạch của X trong đó nhóm A_p tác động lên mỗi phần tử của phân hoạch theo một phép hoán vị hữu hạn.

Chứng minh.

Do ánh xạ thương $\pi_0 : X \rightarrow X/A_p$ liên tục và X là continuum Peano nên không gian thương $Y := X/A_p$ cũng là một continuum Peano. Hơn nữa, π_0 là

ánh xạ mở, nhẹ, hoàn chỉnh; X và Y đều compact, liên thông và liên thông địa phương nên thỏa các điều kiện của 3.2.4. và 3.2.3.

Do Y là continuum Peano nên theo 3.2.1. ta có Y phân hoạch được. Gọi $G = \{g_i\}$ là phân hoạch của Y . Từ 3.2.3. ta có họ hữu hạn $H := \{h \subset X | h \text{ là một thành phần liên thông của } \pi_0^{-1}(g_i), g_i \in G\}$ xác định một phân hoạch của X . Với $g_i \in G$ cho trước, toàn bộ tạo ảnh $h_i := \pi_0^{-1}(g_i) \subset X$ được sắp xếp bởi nhóm A_p . Theo 3.2.3. thì do mỗi h_i chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông nên nhóm A_p hoán vị hữu hạn các thành phần liên thông của h_i và từ đó là các phần tử của phân hoạch H .

Đến đây, ta chỉ vừa thu được một phân hoạch thỏa A_p tác động lên được theo một phép hoán vị hữu hạn nhưng kích thước các phần tử trong phân hoạch lại chưa xác định được có đúng là ε - phân hoạch hay không. Tuy nhiên, giống như trong chứng minh của 3.2.4. ta có kích cỡ các phần tử phân hoạch của X có thể điều chỉnh được nên ta có thể chọn đường kính các phần tử của phân hoạch không lớn hơn ε và từ đó ta thu được kết quả cần tìm là một ε - phân hoạch đẳng biến. ■

Đến đây, chúng ta có thể dễ dàng khái quát kết quả cho các nhóm compact số chiều 0 tùy ý bằng 3.2.6. phía dưới. Pontryagin đã chứng minh mọi nhóm compact số chiều 0 đều là giới hạn ngược của các nhóm hữu hạn và nếu cho trước một nhóm compact 0 chiều (được ký hiệu C) thì khi đó C hữu hạn hoặc C có tôpô của một tập Cantor [7]. Khi C là tập vô hạn thì nhóm C được gọi là *nhóm Cantor*. Trong cả hai trường hợp, ta viết $C = \varprojlim \{C_i, \psi_i^{i+1}\}$ trong đó:

- (1) Mỗi C_i là một nhóm hữu hạn,
- (2) $C_0 = \{e\}$ là nhóm tầm thường,
- (3) $C_i \leq C_{i+1}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C_i = C$, và

(4) Với mỗi $i \geq 0$, ánh xạ $\psi_i^{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i$ là một đồng cấu.

Lưu ý ta có nhóm các số p -adic là một nhóm Cantor : $A_p = \varprojlim \{\mathbb{Z}_{p^n}, \phi_n^{n+1}\}$.

3.2.6. Hệ quả.

Nếu C là một nhóm compact 0 chiều tác động lên một continuum Peano X thì với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có một ε -phân hoạch của X trong đó nhóm C tác động lên mỗi phần tử của phân hoạch như phép giao hoán hữu hạn.

3.3. Phép nâng cung và phép đồng luân

Khi nhóm A_p tác động lên không gian X thì sinh ra không gian quỹ đạo X/A_p và ánh xạ $\pi_0 : X \rightarrow X/A_p$. Ánh xạ π_0 nói chung không phải là một ánh xạ phủ dù các ánh xạ $\pi_n : X/\Delta^n \rightarrow X/\Delta^{n-1}$ là ánh xạ phủ hoặc là ánh xạ phủ phân nhánh. Do đó, một câu hỏi sinh ra là liệu có tồn tại phép nâng một cung từ không gian X/A_p lên một cung trên không gian X hay không? Trong mục này, ta sẽ thấy một số kết quả cơ bản trên không gian phủ là vẫn còn được giữ lại. Đó là tồn tại phép nâng cung và một đẳng cấu giữa các nhóm đồng luân bậc cao $\pi_n(X) \cong \pi_n(X/A_p)$ với mọi $n \geq 2$.

3.3.1. Định nghĩa

Cho A, B là các tập mở, $T : A \rightarrow B$ được gọi là một *phép biến đổi trong, nhẹ* nếu T liên tục, $T(A) = B$ và không continuum nào được nối với một điểm đơn qua T .

3.3.2. Định lý

Cho A là tập mở compact, B là tập mở, $T : A \rightarrow B$ là một phép biến đổi trong, nhẹ và pq là một cung đơn bất kỳ trong B với p_0 thuộc $T^{-1}(p)$. Khi đó tồn tại một cung đơn p_0q_0 trong A sao cho $T(p_0q_0) = pq$ và pq đồng phôi với p_0q_0 qua T .

Chứng minh.

[9]. ■

Định lý trên có thể phát biểu lại như sau :

Cho cung $A \subset Y$ và một điểm $a \in A$. Nếu $p: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ mở, nhẹ, hoàn chỉnh thì với $\alpha \in p^{-1}(a)$ tồn tại một cung $\mathcal{A} \subset X$ sao cho $\alpha \in \mathcal{A}$, $p(\mathcal{A}) = A$ và $p|_{\mathcal{A}}$ là một phép nhúng.

Điều này cho ta thấy các cung có thể được nâng lên từ không gian thương.

3.3.3. Hệ quả.

Cho nhóm p -adic A_p tác động lên một không gian X , tập $A \subset X/A_p$ là một cung. Khi đó ánh xạ $\pi_0: X \rightarrow X/A_p$ là ánh xạ thương cảm sinh từ tác động nhóm thì với bất kỳ $\alpha \in \pi_0^{-1}(a)$ với $a \in A$ cho trước tồn tại một cung $\mathcal{A} \subset X$ thỏa $\pi_0(\mathcal{A}) = A$, $\pi_0(\alpha) = a$ và $\pi_0|_{\mathcal{A}}$ là một phép nhúng.

Nếu tác động nêu trên trở thành tác động tự do thì ta có một phát biểu mạnh hơn như sau:

3.3.4. Định lý

Nếu A_p tác động tự do lên X và $\pi_0: X \rightarrow X/A_p$ là ánh xạ thương thì với bất kỳ cung $A \subset X/A_p$ ta có tạo ảnh $\pi_0^{-1}(A) \cong A_p \times [0,1]$.

Chứng minh.

Gọi $h: [0,1] \hookrightarrow X/A_p$ là một tham số hóa của cung $A := h([0,1]) \subset X/A_p$.

Theo 3.3.3. với mỗi điểm $a \in h^{-1}(0)$ ta có một cung $\mathcal{A}_a \subset X$. Ta định nghĩa $h_a: [0,1] \hookrightarrow X$ là ánh xạ thỏa $h_a(t) \in \pi_0^{-1}(h(t)) \cap \mathcal{A}_a$. Do $\pi_0|_{\mathcal{A}_a}$ là một phép nhúng nên ánh xạ h_a là một phép nhúng được định nghĩa tốt.

Cố định điểm $a \in h^{-1}(0)$ và đặt $\tilde{A} := \bigcup_{g \in A_p} g(\mathcal{A}_a)$. Do $\mathcal{A}_a \subset \tilde{A}$ nên

$\pi_0(\tilde{A}) = A$. Lấy một điểm $x \in \pi_0^{-1}(a)$ ta có $\pi_0(x) \in A$ suy ra tồn tại tham số $t_x \in [0,1]$ sao cho $\pi_0(x) = h(t_x)$.

Đặt $y = h_a(t_x) \in \mathcal{A}_a$ ta có $\pi_0(y) = \pi_0(h_a(t_x)) = h(t_x) = \pi_0(x)$ suy ra tồn tại $g_x \in A_p$ sao cho $g_x(y) = x$. Lại có $g_x(\mathcal{A}_a) \subset \tilde{A}$ nên $x \in \tilde{A}$. Do đó $\tilde{A} = \pi_0^{-1}(A)$.

Giả sử có một phần tử không tầm thường $g \in A_p$ sao cho tồn tại một điểm $x \in \mathcal{A}_a \cap g(\mathcal{A}_a)$. Lấy $t_a \in [0,1]$ thỏa $h_a(t_a) = x$, từ đó $h(t_a) = \pi_0(x)$. Do g là một đồng phôi nên tồn tại một tham số hóa $h_g : [0,1] \rightarrow g(\mathcal{A}_a)$ thỏa $g(h_a(t)) = h_g(t)$. Vì $\pi_0(h_g(z)) = p(z)$ với mọi $z \in X$ nên nó chỉ ra đẳng thức sau $\pi_0(h_a(t)) = \pi_0(g(h_a(t))) = \pi_0(h_g(t))$ với mọi $t \in [0,1]$. Lấy $t_b \in [0,1]$ sao cho $x = h_g(t_b)$. Vì h là phép nhúng và:

$$h(t_a) = \pi_0(x) = \pi_0(h_g(t_b)) = \pi_0(g(h_a(t_b))) = \pi_0(h_a(t_b)) = h(t_b)$$

nên tham số $t_a = t_b$. Do $x = h_g(t_b) = h_g(t_a) = g(h_a(t_a)) = g(x)$ và g không tầm thường nên điều này mâu thuẫn với A_p tác động tự do. Do $\mathcal{A}_a \cap g(\mathcal{A}_a) = \emptyset$ với mọi $g \in A_p \setminus \{e\}$ nên tạo ảnh $\pi_0^{-1}(A) \cong A_p \times [0,1]$. ■

Định lý tiếp theo sẽ cho chúng ta cách xây dựng một dãy các các phép nâng của một ánh xạ cho trước h đến các không gian thương X/Δ^n trong đó h đi từ một không gian compact liên thông đơn vào không gian thương X/A_p .

3.3.5. Định lý

Cho nhóm p -adic A_p tác động lên không gian X , ánh xạ $\pi_0 : X \rightarrow X/A_p$ là ánh xạ thương cảm sinh từ tác động nhóm và ánh xạ

$h: K \rightarrow X/A_p$ liên tục (K là không gian compact, liên thông đơn) thì tồn tại một phép nâng $\hat{h}: K \rightarrow X$ sao cho $\pi_0 \circ \hat{h} = h$.

Chứng minh.

Ta có h là ánh xạ liên tục, K compact và π_0 là ánh xạ hoàn chỉnh nên tập $Y := \pi_0^{-1}(h(K))$ compact. Gọi τ là một phần tử sinh của nhóm A_p . Khi đó $\tau|_Y$ liên tục đều và sự hội tụ $\tau|_Y^{p^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1_Y$ là hội tụ đều.

Chọn $k_0 \in K$ là một điểm cơ sở và cố định điểm cơ sở $x_\omega \in \pi_0^{-1}(h(k_0)) \subset Y \subset X$. Từ dãy ngược của các ánh xạ phủ p -cuộn trên các không gian thương X/Δ^n (trong 3.1.) khi đó ta có với điểm cơ sở $x_\omega \in X$ thì có một dãy tương ứng $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sao cho $x_0 := h(k_0)$, $\pi_n(x_\omega) = x_n$ và $p_n(x_n) = x_{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tương tự như trên, do K liên thông đơn nên có một dãy các ánh xạ $\{\mathcal{H}_n: K \rightarrow X/\Delta^n\}_{n=0}^\infty$ sao cho $\mathcal{H}_n(k_0) = x_n \in X/\Delta^n$ và $P_n \circ \mathcal{H}_n = h$.

Bây giờ ta xác định ánh xạ $\hat{h}: K \rightarrow Y \subset K$ như sau: $\hat{h}(k) \in \bigcap \pi_n^{-1}\mathcal{H}_n(k)$ với mọi $k \in K$. Ánh xạ \hat{h} là xác định tốt do:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\pi_n^{-1}\mathcal{H}_n(k)) = 0$,
- Tập $\pi_{n+1}^{-1}\mathcal{H}_{n+1}(k) \subset \pi_n^{-1}\mathcal{H}_n(k)$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và
- Tập $\pi_n^{-1}\mathcal{H}_n(k)$ compact với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Ánh xạ \hat{h} liên tục do ánh xạ \mathcal{H}_N liên tục và với bất kỳ $\varepsilon > 0$, tồn tại

$N > 0$ sao cho $\|\tau|_Y^{p^N}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. ■

Tiếp theo là hai hệ quả liên quan đến các đồng luân suy ra từ 3.3.5. phía trên.

3.3.6. Hệ quả

Cho nhóm p -adic A_p tác động lên không gian X , ánh xạ $\pi_0: X \rightarrow X/A_p$ là ánh xạ thương cảm sinh từ tác động nhóm, ánh xạ $h: [0,1] \rightarrow X/A_p$ là một đường trong không gian thương và ánh xạ $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X/A_p$ là một đồng luân trong không gian thương thỏa $h(t) = H(t,0)$ với $t \in [0,1]$ thì tồn tại đường $\hat{h}: [0,1] \rightarrow X$ thỏa $\pi_0 \circ \hat{h} = h$ và một đồng luân $\hat{H}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ sao cho $\hat{h}(t) = \hat{H}(t,0)$ với mỗi $t \in [0,1]$ và $\pi_0 \circ \hat{H} = H$.

Chứng minh.

Hai không gian $[0,1]$ và $[0,1] \times [0,1]$ đều compact, liên thông đơn. ■

3.3.7. Hệ quả

Nếu một nhóm p -adic A_p tác động lên không gian X thì với mọi $n \geq 2$ ta có một đẳng cấu của các nhóm đồng luân bậc cao $\pi_n(X) \cong \pi_n(X/A_p)$.

Chứng minh.

Với bất kỳ $n \geq 2$, không gian S^n (mặt cầu) là compact và liên thông đơn nên tồn tại $\hat{h}: S^n \rightarrow X$ thỏa $\pi_0 \circ \hat{h} = h$ với $h: S^n \rightarrow X/A_p$. Từ đó ta có $\pi_n(X) \cong \pi_n(X/A_p)$, [12]. ■

3.4. Tập bất biến

Trong mục này, tác động của nhóm A_p được giả sử là tác động tự do. Sự thu hẹp này tuy không dùng cho các tập mà không nơi nào trong tập này phân tách địa phương được nhưng nó không làm giảm đi tầm quan trọng của các kết quả thu được. Các định lý, bổ đề trong mục này đòi hỏi không gian thương sinh bởi tác động nhóm A_p không phân tách địa phương (tại bất cứ nơi nào trong không gian) bằng hữu hạn các cung. Điều này trông có vẻ là hạn chế mang tính áp đặt nhưng trong bối cảnh đi tìm một phản ví dụ cho phỏng đoán Hilbert -

Smith thì nó lại là bình thường. Bởi vì một phản ví dụ như vậy nếu có cho một đa tạp có số chiều lớn hơn hoặc bằng bốn thì nó phải không phân tách địa phương được bằng bất kỳ các tập con một chiều nào.

Tiếp theo, chúng ta đi tìm hiểu hai bổ đề làm nền tảng xuyên suốt trong các chứng minh của mục này. Chúng chỉ ra giữa hai điểm x và y bất kỳ ta có thể dựng một cung J không những tránh được phần còn lại của quỹ đạo hai đầu mút mà còn tránh được quỹ đạo của chính nó (ngoại trừ khả năng x có thể nằm trong quỹ đạo của y).

3.4.1. Bổ đề

Cho nhóm p -adic A_p tác động tự do lên không gian X . Khi đó với bất kỳ $x, y \in X$ sao cho tồn tại một không gian con liên thông $Y \subset X$ có tính chất S chứa x, y và không gian thương Y/A_p không phân tách địa phương được bằng một số hữu hạn các cung thì với mọi nhóm con $\Delta^h \leq A_p$ tồn tại một cung $J \hookrightarrow X$ từ x đến một điểm $z \in \Delta^h y$ sao cho $J \cap (A_p x \cup A_p y) = \{x, z\}$ và $g(J) \cap J \subset \{x, z\}$ với mọi $g \in A_p$. Hơn nữa, nếu $L \subset X/A_p$ là hợp hữu hạn các cung thì J có thể được chọn sao cho $\pi_0(J) \cap L \subset \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}$.

Chứng minh.

Giả sử $x, y \in Y \subset X$ và $\Delta^h \leq A_p$.

Gọi $\pi_h : A_p Y \rightarrow Y/\Delta^h$ và $\pi_0 : A_p Y \rightarrow Y/A_p$ là các ánh xạ thương cảm sinh từ tác động của A_p . Do $Y/G = GY/G$ với bất kỳ nhóm G tác động lên X nên hai không gian này trong chứng minh có thể dùng để thay thế cho nhau. Vì Y liên thông và có tính chất S nên ta có thể đồng nhất hai không gian thương Y/A_p và Y/Δ^h với nhau. Ta có A_p tác động tự do lên X (và từ đó là trên $A_p Y \subset X$) nên tồn tại ánh xạ phủ p^h -phần tử $P_h : Y/\Delta^h \rightarrow Y/A_p$.

Trong trường hợp điểm $x \in \Delta^h y$ thì đây là cung suy biến nên ta có ngay kết quả cần tìm. Do đó, không mất tổng quát ta có thể giả sử $x \notin \Delta^h y$. Đặt $x_1 := \pi_h(x)$ và $x_2 := \pi_h(y)$ ta có $x \notin \Delta^h y$ nên dẫn đến $x_1 \neq x_2$. Vì P_h là ánh xạ phủ và Y/Δ^h có tính chất S nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $w \in Y/\Delta^h$ khoảng cách $d(w, \tau^m(w)) \geq \delta$ với mọi $1 \leq m < p^h$.

Do Y/A_p có tính chất S nên Y/A_p có một phân hoạch khối ν sao cho với mỗi $N \in \nu$ thì cái kéo lại $P_h^{-1}(N)$ có chính xác p^h thành phần liên thông mà trong đó mỗi thành phần liên thông lại có đường kính nhỏ hơn δ trong Y/Δ^h . Hơn nữa, họ các thành phần liên thông này lại xác định một phân hoạch khối cảm sinh μ của Y/Δ^h trong đó mỗi phần tử phân hoạch $M \in \mu$ có bậc đúng bằng p^h dưới tác động nhóm tự do \mathbb{Z}_{p^h} cảm sinh từ A_p . Điều này cho thấy $x_1 \in \text{Int}(M)$ với duy nhất $M \in \mu$ nào đó.

Ta có Y/Δ^h liên thông và có tính chất S nên không gian này là liên thông cung. Gọi $\{M_i\}_{i=1}^n \subset \mu$ là một xích cực tiểu nối hai điểm x_1 và x_2 theo thứ tự tăng dần của n . Do đó $x_1 \in M_1$, $x_1 \notin M_i$ với $i > 1$; $x_2 \in M_n$, $x_2 \notin M_j$ với $j < n$ và nếu $\partial M_k \cap \partial M_j \neq \emptyset$ thì $|k - j| \leq 1$.

Vì A_p tác động lên μ như một tác động nhóm tự do \mathbb{Z}_{p^h} nên với bất kỳ $0 < k < p^h$ và mọi $1 \leq i, j \leq n$ nếu $\tau^k(M_j) \cap M_i$ có một tập mở khác rỗng thì $\tau^k(M_j) = M_i$.

Đặt $B_0 := \{x_1\}$. Với $1 \leq i \leq n$, lấy $B_i \subset \partial M_i \cap \partial M_{i+1}$ là tập lớn nhất có tính chất nếu $b \in B_i$ và $b \in \partial M$ thì $M = M_i$ hoặc $M = M_{i+1}$. Do μ là một phân hoạch lớp nên mỗi tập B_i khác rỗng và phân tách địa phương.

Gọi $B'_i = \bigcup_{j=1}^i B_j$.

Đặt $K_0 := \{x_2\}$ và $L_0 := \{\tau^l(K_0)\}_{l=1}^{p^h-1}$. Do L_0 là một họ hữu hạn các điểm nên không phân tách địa phương được. Do đó $B_1 \setminus L_0$ khác rỗng. Chọn K_1 là cung trong M_1 đi từ điểm $k_0 := x_1$ đến điểm $k_1 \in B_1 \setminus L_0$ thỏa $K_1 \cap B'_1 = \{k_1\}$. Lại đặt $L_1 := L_0 \cup \bigcup_{l=1}^{p^h-1} \tau^l(K_1)$. Vì $L_1 \setminus L_0 \subset Y/\Delta^h \setminus M_1$, $K_1 \cap L_0 = \emptyset$ và $K_1 \cap \partial M_1 = \{k_1\}$ nên $L_1 \cap K_1 = \emptyset$.

Giả sử với k nào đó mà $1 \leq k < n$ thì với mọi $1 \leq i \leq k$ ta có các cung $K_i \subset M_i$ đi từ $k_{i-1} \in B_{i-1}$ đến $k_i \in B_i$ sao cho tập $L_k := \bigcup_{j=0}^k \bigcup_{l=1}^{p^h-1} \tau^l(K_j)$ có hữu hạn các cung rời nhau và hữu hạn các điểm cô lập, hợp $K'_l := \bigcup_{j=1}^k K_j$ là một cung đi từ x_0 đến k_k , $K'_k \cap L_k = \emptyset$ và $K'_k \cap B'_k = \{k_j\}_{j=1}^k$.

Vì

$$(L_k \setminus L_0) \cap B'_{n-1} \subseteq \bigcup_{l=1}^{p^h-1} \tau^l(K'_k \cap B'_{n-1}) = \bigcup_{l=1}^{p^h-1} \tau^l(K'_k \cap B'_k) = \bigcup_{l=1}^{p^h-1} \bigcup_{j=1}^k \tau^l(k_j)$$

là một tập hữu hạn các điểm nên nó không phân tách địa phương được. Lưu ý tập $B_{k+1} \setminus L_k$ là khác rỗng nên:

Lấy $k_{k+1} \in B_{k+1} \setminus L_k$.

Do L_k chứa hữu hạn các cung và các điểm cô lập nên nó không phân tách địa phương M_{k+1} . Ta gọi K_{k+1} là một cung từ $k_k \in B_k$ đến $k_{k+1} \in B_{k+1}$ thỏa $K_{k+1} \cap L_k = \emptyset$ và $K_{k+1} \cap B'_{k+1} = \{k_k, k_{k+1}\}$. Đặt $L_{k+1} := L_k \cup \bigcup_{l=1}^{p^h-1} \tau^l(K_{k+1})$. Nhận xét rằng $L_{k+1} \cap K'_{k+1} = \emptyset$ do hợp $L_k \cup K'_k$ là một A_p -quỹ đạo đầy đủ của K'_k .

Bằng phép quy nạp hữu hạn ta xác định $K' := K'_n$ trong đó điểm đầu mút k_n được lấy là x_2 .

Gọi J là một cung (thu được từ 3.3.3.) là phép nâng của K' bắt đầu từ điểm $x \in Y$. Khi đó bổ đề được chứng minh hoàn tất. Hơn nữa, cho một số tập hữu hạn các cung L , ta nhận thấy tập $Y \setminus L \cup \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}$ có tính chất S và có các điều kiện phân tách địa phương nên $Y \setminus L \cup \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}$ có thể được dùng trong chứng minh thay cho Y . Do đó ta có thể chọn J sao cho $\pi_0(J) \cap L \subset \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}$. ■

Trong khi bổ đề phía trước chỉ có thể vẽ một cung trong nhóm con của mục tiêu mong muốn thì bổ đề dưới đây sẽ dùng nó để thu được một cung đi đến chính xác điểm đầu mút mà ta cần.

3.4.2. Bổ đề

Cho nhóm p -adic A_p tác động tự do lên không gian X . Khi đó với bất kỳ $x, y \in X$ sao cho tồn tại một không gian con liên thông $Y \subset X$ có tính chất S chứa x, y và không gian thương Y/A_p không phân tách địa phương được bởi một số hữu hạn các cung thì có một cung $J \hookrightarrow X$ từ x đến y sao cho $J \cap (A_p x \cup A_p y) = \{x, y\}$ và $g(J) \cap J \subset \{x, y\}$ với mọi $g \in A_p$. Hơn nữa, nếu $L \subset X/A_p$ là hợp hữu hạn các cung thì cung J có thể được chọn sao cho $\pi_0(J) \cap L \subset \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}$.

Chứng minh.

Lấy $x, y \in Y \subset X$ như trên. Trong trường hợp $x = y$ thì bổ đề 3.4.2. là tầm thường. Do đó không mất tổng quát giả sử $x \neq y$ và đặt $d_0 := d(x, y)$. Do Y có tính chất S nên Y phân hoạch được. Gọi ν_0 là một $\frac{d_0}{2}$ -phân hoạch của Y sao cho $y \in \overset{\circ}{Y}_1$ trong đó $Y_1 \in \nu_0$.

Chọn một nhóm con $\Delta^{h_0} \leq A_p$ thỏa $\Delta^{h_0} y \subset \overset{\circ}{Y}_1$. Từ 3.4.1. suy ra tồn tại một cung J_0 từ x đến điểm $y_0 \in \Delta^{h_0} y \subset \overset{\circ}{Y}_1$.

Gọi J'_0 là một cung con của J_0 từ x đến ∂Y_1 sao cho $J'_0 \cap \partial Y_1 = \{x_1\}$ là một tập đơn.

Đặt $d_1 := \min \left\{ \frac{d_0}{2}, d(x_1, y) \right\}$. Do Y_1 có tính chất S nên tồn tại một $\frac{d_1}{2}$ -phân hoạch ν_1 của Y_1 thỏa $y \in \overset{\circ}{Y}_2$ với $Y_2 \in \nu_1$. Lấy nhóm con $\Delta^{h_1} \leq \Delta^{h_0}$ sao cho $\Delta^{h_1} y \subset \overset{\circ}{Y}_2$ và áp dụng lại 3.4.1. ta tiếp tục thu được cung J_1 từ x_1 đến $y_1 \in \Delta^{h_1} y \subset \overset{\circ}{Y}_2$ thỏa $J'_0 \cap A_p J_1 = \{x_1\}$.

Ta gọi J'_1 là cung tạo thành từ J'_0 với cung con của J_1 từ x_1 đến ∂Y_2 thỏa $J'_1 \cap \partial Y_2$ là tập đơn $\{x_2\}$, lập lại quá trình trên một cách vô hạn ta thu được dãy các cung $\{J'_k\}_{k=0}^\infty$, dãy các đường kính $\{d_k\}_{k=0}^\infty$ và dãy các đầu mút $\{y_k\}_{k=0}^\infty$ của chúng.

Do dãy (d_k) khả tổng nên $J := \lim J'_n$ là một cung. Vì $y_k \rightarrow y$ nên cung J đi từ x đến y . Bằng cách xây dựng này, cung J có các tính chất như mong muốn. ■

Áp dụng 3.4.2. khi đầu mút y nằm trong quỹ đạo của x và sau đó từ toàn bộ quỹ đạo của các cung thu được thì ta sẽ có một vài continuum con thú vị được sinh ra khi A_p của ta tác động tự do.

3.4.3. Định lý

Cho một nhóm p -adic A_p tác động tự do lên không gian X có tính chất với mọi cặp điểm $x, y \in X$ tồn tại một continuum Peano $Y \subset X$ chứa hai điểm trên và không gian thương Y/A_p không phân tách địa phương bởi một số

hữu hạn các cung. Khi đó, với mọi $x \in X$ tồn tại một không gian $Z_x \subset A_p Y \subset X$ với $x \in Z_x$, sự thu hẹp $(A_p)|_{Z_x}$ là tác động tự do và có thể được xây dựng sao cho Z_x và Z_x/A_p là đồng phôi (tương ứng) với:

- (1) Tích $A_p \times S^1$ và đường tròn S^1 trong đó nhóm A_p chỉ tác động lên nhân tử đầu tiên,
- (2) một solenoid và một đường tròn,
- (3) p^k solenoid phân biệt và một đường tròn.

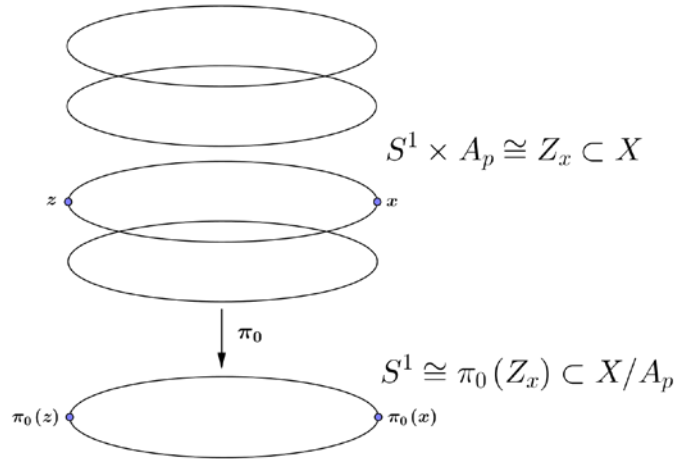
Chứng minh.

Lấy $\tau \in A_p$ là một phần tử sinh của nhóm.

- (1) Lấy $z \notin A_p(x)$. Dùng 3.4.2. ta có một cung J_1 từ x đến z

thỏa $\pi_0(J_1)$ là một cung. Áp dụng lại bổ đề ta có một cung J_2 từ z đến x thỏa $\pi_0(J_2)$ là một cung. Khi đó $J_1 \cap J_2 = \{x, z\}$ và $\pi_0(J_1 \cup J_2)$ là một đường cong đóng đơn. Đặt $Z_x := A_p(J_1 \cup J_2)$.

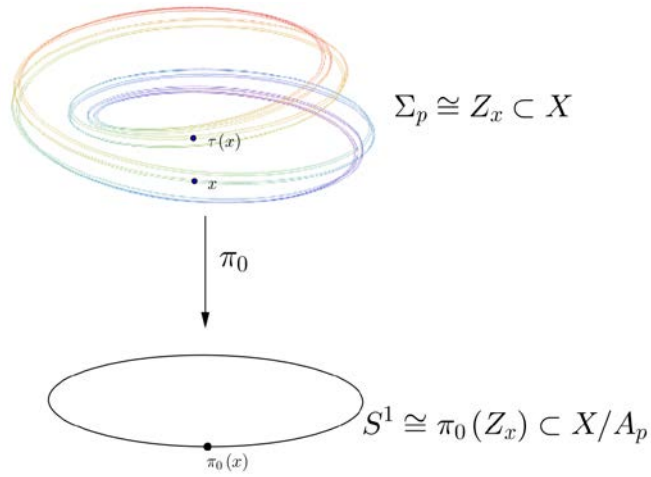
Không gian $Z_x \cong A_p \times S^1$ và không gian quỹ đạo $Z_x/A_p \cong S^1$.



Hình 3.4.1.

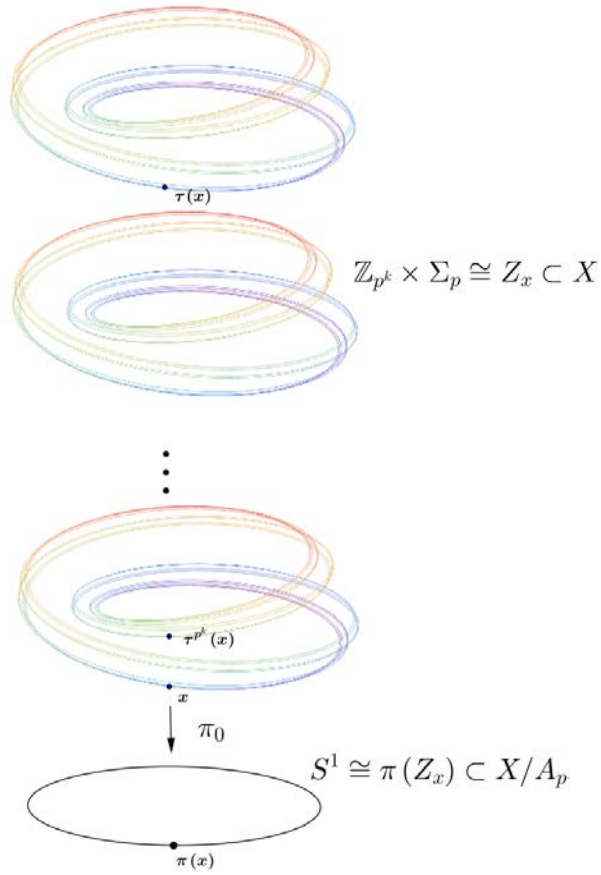
- (2) Dùng 3.4.2. ta có một cung J từ x đến $\tau(x)$ trong đó

$Z_x := A_p(J) \cong \Sigma_p$ là một p -adic solenoid. Hơn nữa, không gian quỹ đạo $J/A_p = Z_x/A_p$ là một đường cong đóng đơn nên đồng phôi với một đường tròn.



Hình 3.4.2.

- (3) Dùng 3.4.2. ta có một cung J từ x đến $\tau^{p^k}(x)$. Toàn ảnh $Z_x := A_p(J) \cong \mathbb{Z}_{p^k} \times \Sigma_p$ xác định p^k các p -adic solenoid phân biệt. Ta lại có $J/A_p \cong S^1$ là một đường cong đóng đơn nên đồng phôi với một đường tròn.



Hình 3.4.3.

■

Tiếp theo, chúng ta giới thiệu một khái niệm liên quan đến phân hoạch sẽ được dùng trong phần còn lại của mục này.

3.4.4. Định nghĩa

Cho P là một phân hoạch. Khi đó *độ lớn phân hoạch* P , ký hiệu *mesh* P , là đường kính lớn nhất của mọi phần tử trong phân hoạch P .

3.4.5. Ví dụ

Trên đoạn $[1, 5]$ ta xét phân hoạch

$$P = \{P_0 = 1, P_1 = 3, P_2 = 4, P_3 = 5\}.$$

Khi đó $\text{mesh } P = \max \{|P_i - P_{i-1}|; i = 0, \dots, 3\} = 2.$

Cuối cùng, bằng cách dùng các không gian bất biến ở phần (2) và (3) của 3.4.3. (cụ thể là các p -adic solenoid), chúng ta sẽ đi vào một ví dụ phức tạp về

xây dựng một nhóm đường cong Menger bất biến khi cho nhóm p -adic tác động tự do lên continuum Peano thỏa một số điều kiện như trong định lý dưới đây.

3.4.6. Định lý

Nếu một nhóm p -adic A_p tác động một cách tự do lên continuum Peano X thỏa X/A_p không phân tách địa phương được bằng một số hữu hạn các cung thì với mỗi điểm $x \in X$ có một đường cong Menger μ chứa x trong đó thu hẹp $(A_p)_{|\mu}$ là một tác động p -adic tự do.

Chứng minh.

Đầu tiên chúng ta đi xác định một số dạng continuum như sau:

Một không gian con V của X/A_p được gọi là dạng I nếu nó đồng cấu với một cung có hai đầu mút phân biệt trong không gian xung quanh.

Một không gian con V của X/A_p được gọi là dạng Q nếu nó đồng cấu với một không gian dạng I và với một đường tròn mà tiếp xúc tại một điểm bên trong của cung đó.

Một không gian con V của X/A_p được gọi là dạng X nếu nó đồng cấu với hợp của hai không gian dạng I giao nhau là một điểm đơn và điểm đó nằm trong phần trong của cả hai cung.

Quay lại định lý:

Lấy $x \in X$. Từ 3.4.3. ta có một đường cong đóng đơn $W_0 \subset X/A_p$ thỏa $\Sigma_x := \pi_0^{-1}(W_0)$ là một solenoid với nhóm A_p tác động tự do lên trên. Để chứng minh định lý này ta sẽ dùng phép quy nạp. Đầu tiên, đặt $\Omega'_{-1} := \{X/A_p\}$ là một phân hoạch khối tầm thường của X/A_p , $B_{-1} = C_0 = \emptyset$ và $L_0 = 0$.

Do W_0 là một đường cong đóng đơn trong continuum Peano X/A_p nên ta chọn Ω'_0 là 1 – phân hoạch khối của X/A_p sao cho có một họ con Ω_0 thỏa những tính chất sau đây:

- (1) $W_0 \cap \bar{\omega} = \emptyset$ với bất kỳ $\omega \in (\Omega'_0 \setminus \Omega_0)$.
- (2) Với mỗi $\omega \in \Omega_0$ thì $W_0 \cap \omega$ thuộc dạng I và có các điểm biên là α_ω và β_ω .

Đặt $B_0 := \{\alpha_\omega \mid \omega \in \Omega_0\} \cup \{\beta_\omega \mid \omega \in \Omega_0\}$.

Với mỗi $\omega \in \Omega_0$, gọi $K_\omega \subset \omega$ là một phần tử chính của lọc chính của ω thỏa $K_\omega \cap W_0 \neq \emptyset$. Chọn một phần tử $c_\omega \in K_\omega \cap W_0$. Tồn tại $l_\omega \geq 0$ sao cho mỗi thành phần liên thông của nghịch ảnh $\pi_0^{-1}(K_\omega)$ là không đổi qua Δ^{l_ω} . Chọn $L_1 \geq 1$ thỏa $L_1 \geq \max\{l_\omega \mid \omega \in \Omega_0\}$. Theo 3.4.3. ta có một đường cong đóng đơn $J_\omega \subset \bar{K}_\omega \subset \omega \subset X/A_p$ với điểm cơ sở c_ω thỏa $J_\omega \cap W_0 = \{c_\omega\}$ và $\pi_0^{-1}(J_\omega)$ có chính xác p^{L_1} solenoid hoán vị qua A_p .

Đặt $C_1 := \{c_\omega \mid \omega \in \Omega_0\}$ và $W_1 := W_0 \cup \bigcup_{\omega \in \Omega_0} J_\omega$.

Với $k \geq 1$ nào đó, giả sử với mọi $1 \leq n \leq k$ ta có:

- (1) Tồn tại một tập hữu hạn $C_n \subset X/A_p$ thỏa $C_{n-1} \subset C_n$ và $C_{n-1} \neq C_n$.
- (2) Tồn tại số tự nhiên $L_n > L_{n-1}$.

- (3) Không gian $W_n \neq W_{n-1}$, trong đó $W_{n-1} \subset W_n \subset X/A_p$, là một

continuum phân tích được thành hữu hạn các đường cong đóng đơn J_i có tính chất nếu $J_i \subset W_{n-1}$ và $J_i \neq W_{n-1}$ thì $J_i \cap W_{n-1} \subset C_n \setminus C_{n-1}$ là tập đơn và $\pi_0^{-1}(J_i) \subset X$ là p^{L_n} các solenoid.

- (4) Họ Ω'_{n-1} là một 2^{1-n} – phân hoạch khối của X/A_p lọc Ω'_{n-2} sao cho

họ con $\Omega_{n-1} := \{\omega \in \Omega'_{n-1} \mid \omega \cap W_{n-1} \neq \emptyset\}$ thỏa $W_{n-1} \cap \bar{\omega} = \emptyset$ với bất kỳ $\omega \in (\Omega'_{n-1} \setminus \Omega_{n-1})$.

- (5) Hơn nữa, phân hoạch Ω'_{n-1} được xây dựng sao cho với bất kỳ $\omega \in \Omega_{n-1}$ thì không gian con $W_n \cap \omega$ thuộc dạng Q hoặc dạng X có biên $W_n \cap \partial\omega$ có hai hoặc bốn điểm cô lập tương ứng.

- (6) Tập tất cả các điểm biên B_{n-1} trong đó

$$B_{n-2} \subset B_{n-1} := \bigcup_{\omega \in \Omega_{n-1}} \{x \in W_n \mid x \in \partial\omega\} \text{ phân tách địa phương } W_n.$$

Lấy Ω'_k là một 2^{-k} - phân hoạch khối lọc Ω'_0 sao cho họ con $\Omega_k := \{\omega \in \Omega'_k \mid \omega \cap W_k \neq \emptyset\}$ thỏa:

- (1) $W_k \cap \bar{\omega} = \emptyset$ với bất kỳ $\omega \in (\Omega'_k \setminus \Omega_k)$.
- (2) Nếu $\omega \in \Omega_k$ thì $\omega \cap W_k$ thuộc dạng I hoặc dạng X.
- (3) Nếu $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_k$ mà $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2 \cap W_k \neq \emptyset$ thì $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2 \cap W_k$ là tập đơn và chỉ tối đa một trong hai tập ω_1, ω_2 có dạng X.

Đặt $B_k := B_{k-1} \cup \bigcup_{\omega \in \Omega_k} (W_k \cap \partial\omega)$ là hữu hạn các điểm thì tập này phân tách địa phương W_k .

Đặt $O_k := \{\omega \in \Omega_k\}$ trong đó $\omega \cap W_k$ là dạng I. Với mỗi $\omega \in O_k$, lấy $K_\omega \subset \omega$ là phần tử chính trong lọc chính của ω thỏa $K_\omega \cap W_k \neq \emptyset$. Lấy $c_\omega \in K_\omega \cap W_k$. Chọn một số $L_{k+1} > L_k$ thỏa với mọi K_ω thì mỗi thành phần liên thông của nghịch ảnh $\pi_0^{-1}(K_\omega)$ là bất biến qua $\Delta^{L_{k+1}}$. Dùng 3.4.3. ta có một đường cong đóng đơn $J_\omega \subset \bar{K}_\omega \subset \omega \subset X/A_p$ với điểm cơ sở c_ω thỏa $J_\omega \cap W_k = \{c_\omega\}$ và $\pi_0^{-1}(J_\omega)$ có chính xác $p^{L_{k+1}}$ các solenoid hoán vị qua A_p .

Đặt $W_{k+1} := W_k \cup \bigcup_{\omega \in \Omega_k} J_\omega$ và lấy $C_{k+1} := C_k \cup \{c_\omega \mid \omega \in O_k\}$. Điều này kết thúc phép quy nạp và do đó có một dãy tăng nghiêm ngặt các số tự nhiên $\{L_n\}$ cũng như các tập $W := \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$, $C := \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$ và $B := \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$.

Đặt $\mu := \pi_0^{-1}(W)$. Ta cần chứng minh μ là một đường cong Menger bằng cách chỉ ra μ thỏa những đặc trưng của đường cong Menger. Những đặc trưng này được Bestvina chỉ ra là đường cong phải đồng nhất với tập compact có số chiều 1, liên thông, liên thông địa phương và có tính chất cung phân chia [3].

Yêu cầu 1. Không gian μ có chiều phủ $\dim \mu = 1$.

Ta đặt $\mathcal{B} := \left\{ \left\{ \omega \in \Omega_i \right\} \cup \bigcup_{b \in B_i} \text{St}(b, \Omega_i) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$. Do $\text{mesh}(\Omega_i) \rightarrow 0$ khi

$i \rightarrow \infty$ nên họ \mathcal{B} xác định một cơ sở mang tính chất S cho W . Với bất kỳ $B \in \mathcal{B}$ do biên ∂B có hữu hạn các điểm nên W có chiều phủ $\dim W = 1$.

Với mỗi $B \in \mathcal{B}$, nghịch ảnh $\pi_0^{-1}(B)$ gồm hữu hạn các tập mở và họ $\mathcal{B}' := \{B' \subset X \mid B' \text{ là một thành phần liên thông của } \pi_0^{-1}(B) \text{ với } B \in \mathcal{B}\}$ xác định một cơ sở của μ . Với mỗi $B \in \mathcal{B}$, do biên ∂B là tập hữu hạn nên với mọi $B' \in \mathcal{B}'$ ta có biên $\partial B'$ là hữu hạn các tập Cantor và do đó có số chiều 0. Từ đó, ta có $\dim \mu = 1$.

Yêu cầu 2. Không gian μ liên thông.

Lấy hai điểm $y_1, y_2 \in \mu$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\pi_0(y_i) \in W_n$ với $i = 1, 2$. Khi đó có một cung nối $\pi_0(y_i)$ và W_0 được nâng đến các cung trong μ bắt đầu từ y_i với $i = 1, 2$. Do nghịch ảnh $\pi_0^{-1}(W_0) = \Sigma_x$ là solenoid nên nó liên thông. Do

đó hai điểm y_1 và y_2 nằm trên cùng một thành phần liên thông của μ . Do y_1, y_2 là cặp điểm tùy ý trong μ , không gian μ là liên thông.

Yêu cầu 3. Không gian μ liên thông địa phương.

Ta dùng hai cơ sở \mathcal{B} và \mathcal{B}' đã xác định trong Yêu cầu 1., để chứng minh μ liên thông địa phương thì ta chỉ cần chứng minh mỗi $B' \in \mathcal{B}'$ chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông. Điều này lại được thu hẹp lại là ta cần chứng minh mỗi $B \in \mathcal{B}$ chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông bằng cách chỉ ra với mọi $i \in \mathbb{N}$, $\omega \cap W$ có hữu hạn các thành phần liên thông với mọi $\omega \in \Omega_i$.

Với $\omega \in \Omega_i$ tùy ý thì $\omega \cap W_i$ là dạng I (do đó là một cung) hoặc dạng X (bốn cung gặp tại một điểm chung). Trong cả hai trường hợp ta có $\omega \cap W_i$ liên thông. Lấy $w \in \omega \cap W$ thì $w \in W_n$ với $n \geq i$. Từ cách xây dựng của W_n ta có hữu hạn cung trong ω đi từ w đến W_i . Do w tùy ý nên $\omega \cap W$ liên thông. Do đó mọi $B \in \mathcal{B}$ liên thông và dẫn đến mọi $B' \in \mathcal{B}$ có hữu hạn các thành phần liên thông và μ liên thông địa phương.

Yêu cầu 4. Không gian μ có tính chất cung phân chia.

Gọi $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow \mu$ là các cung trong μ . Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho các điều sau đây đúng:

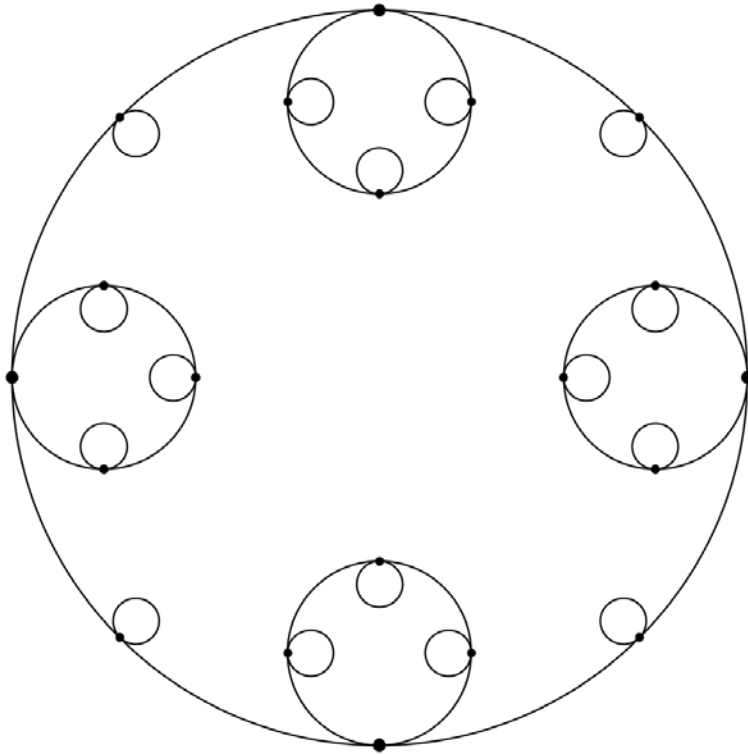
- (1) Hình chiếu của điểm đầu $\pi_0 f_i(0) \in W_n$ với $i = 1, 2$.
- (2) Kích thước tối đa của vòng lặp (tức là $\text{mesh}(\Omega'_{n-1})$) là $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
- (3) Nhóm con $\Delta^{L_n} \leq A_p$ thỏa $d(x, gx) < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $x \in X$ và $g \in \Delta^{L_n}$.

Xét các phép chiếu cung $\pi_0 f_i : [0, 1] \rightarrow W$ với $i = 1, 2$; khi đó với mỗi tập W_n xấp xỉ (gần bằng) W ta thu được các cung $f'_i : [0, 1] \rightarrow W_n$ với $i = 1, 2$. Với bất kỳ $g \in \Delta^{L_n}$ và $i = 1, 2$; mọi phép nâng $\hat{f}_i : [0, 1] \rightarrow \mu$ của f'_i từ $f'_i(0)$ đến $gf_i(0)$ thỏa $d(f_1, \hat{f}_i) < \varepsilon$.

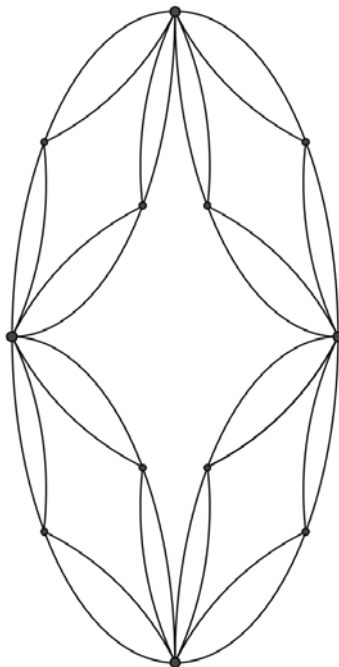
Do ảnh của mỗi f'_i có thể phân tích thành hữu hạn các phần liên thông đơn trong W_n trong đó mỗi phần được nâng một cách duy nhất đến điểm cơ sở được chọn và có một số (không đếm được) cách chọn cho các phép nâng từ cách chọn một điểm cơ sở của $g \in \Delta^{L_n}$. Ta suy ra có các phép nâng \hat{f}_1, \hat{f}_2 thỏa $d(f_i, \hat{f}_i) < \varepsilon$ và $\hat{f}_1 \cap \hat{f}_2 = \emptyset$. Do đó μ có tính chất cung phân chia.

Do μ là không gian metric compact, liên thông, liên thông địa phương có chiều phủ là 1 và có tính chất cung phân chia thỏa các đặc trưng Bestvina của đường cong Menger [3] nên không gian μ là một đường cong Menger. ■

Từ kết quả của 3.6.4. với mỗi $x \in X$ có một đường cong Menger $A_p -$ bất biến. Nếu ta thu hẹp tác động tự do A_p lên một trong những đường cong Menger này thì ta thu được một tác động A_p tự do lên μ^1 với một không gian quỹ đạo 1 – chiều. Điều này là tương tự nhưng không đồng nhất với tác động A_p tự do lên μ^1 được A. N. Dranishnikov [4] tìm được và sau đó được mô tả bởi Zhiqing Yang [11]. Ta chỉ cần so sánh các không gian quỹ đạo tương ứng của mỗi tác động thì sẽ dễ dàng thấy được sự khác nhau của hai tác động này. Biểu diễn dưới đây của mỗi không gian quỹ đạo đến bước thứ ba của cách xây dựng. Không gian quỹ đạo μ^1/A_p từ 3.4.6. có các điểm cắt còn không gian quỹ đạo dưới tác động Dranishnikov chỉ có các điểm cắt địa phương.



Hình 3.4.4. μ^1/A_p theo 3.4.6.



Hình 3.4.5. μ^1/A_p theo Dranishnikov[4,11]

KẾT LUẬN

Kể từ khi được nhà toán học Đức Kurt Hensel giới thiệu vào năm 1897 cho đến nay, các số p -adic đã dần dần từng bước được các nhà toán học kế nhiệm nghiên cứu và khám phá mở rộng chúng thành những lý thuyết toán học quan trọng được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và cũng như trong vật lý, thậm chí là cả trong sinh học.

Khi nghiên cứu các số p -adic này, các nhà toán học nhận ra số p -adic đã quét sạch mọi cách mở rộng của tập số hữu tỉ \mathbb{Q} . Năm 1910, khi Steinitz trình bày các nghiên cứu của mình trong một bảng tóm tắt về lý thuyết các trường thì đó cũng là lúc các số p -adic được xem như là một động cơ thúc đẩy cho sự hình thành một lý thuyết mới. Cũng trong thời gian đó Fréchet và Riesz đã vận dụng các tư tưởng tôpô để làm rõ và đưa ra những hiểu biết mới về số p -adic. Sau này, khi các số p -adic được Kürschak trình bày dưới dạng tôpô của các không gian metric và cùng với một số nghiên cứu của các nhà toán học khác đã hình thành nên giải tích p -adic. Từ đó, các số p -adic, một cách tự nhiên đã hòa mình vào hệ thống toán học trên toàn thế giới; thu hút thêm nữa sự quan tâm của các nhà nghiên cứu và do kết quả là hàng loạt các kết quả ra đời và dĩ nhiên kèm theo đó là các vấn đề nảy sinh trong quá trình tìm hiểu chúng.

Tuy các vấn đề này đa phần đều được giải quyết nhưng lại có những vấn đề lại làm cho các nhà toán học không giải quyết được. Một trong các vấn đề như vậy chính là tìm câu trả lời cho phỏng đoán Hilbert - Smith: "Một đa tạp M bất kỳ có tồn tại một tác động hiệu quả của nhóm p -adic lên nó hay không?" Một vấn đề với hình thức phát biểu khá ngắn gọn nhưng việc tìm lời giải cho nó quả thực lại là một hành trình dài mà cho đến gần đây chỉ giải quyết được cho trường hợp đa tạp có số chiều đến 3 mà thôi. Với một vấn đề như vậy thì luận văn này không đi tìm lời giải cho đa tạp có số chiều lớn hơn mà đơn giản là chỉ

tìm hiểu một không gian sẽ có những tính chất gì khi tồn tại một tác hiệu quả của nhóm p -adic lên nó. Cụ thể hơn, không gian mà chúng ta đi tìm hiểu ở đây là continuum Peano.

Với mục tiêu như vậy, luận văn này đã được chia làm ba chương. Chương 1 chủ yếu nêu lại các khái niệm tôpô xuất hiện trong luận văn nhằm mục đích giúp người đọc làm quen với chúng. Chương này cũng trình bày khái niệm về số p -adic và kèm theo đó là một số ví dụ giúp làm rõ khái niệm về số p -adic. Những kiến thức này sẽ giúp Chương 2 và Chương 3 trở nên rõ ràng hơn khi đọc.

Tiếp theo, Chương 2 đặc biệt chú ý đến hai khái niệm tính chất S và phân hoạch một tập. Qua chương này chúng ta thấy hai khái niệm có mối liên hệ mật thiết với nhau cũng như một số tính chất của từng khái niệm. Chương 2 là một bước đệm cho ta thấy được xuất phát điểm của Chương 3.

Tiếp nối các kiến thức có trong Chương 1 và Chương 2, đến Chương 3 chúng ta tìm hiểu được khái niệm về phân hoạch đẳng biến của continuum Peano là gì. Cùng với đó là sự tồn tại các phép nâng cung từ không gian thương và phép đẳng cấu giữa các nhóm đồng luân bậc cao dưới tác động của nhóm p -adic và cuối cùng là cách xây dựng một số continuum con mới từ quỹ đạo cung cũng như tạo ra một đường cong Menger từ tác động tự do của nhóm p -adic lên continuum Peano ra sao.

Tuy nhiên, trong quá trình làm việc, do trình độ bản thân còn hạn chế nên dù cố gắng nhưng có thể vẫn còn những thiếu sót trong luận văn này và có thể còn những kết quả khác chưa được trình bày. Hơn nữa, các kết quả được trình bày trong luận văn này vẫn còn có thể mở rộng hơn nữa. Ví dụ như nếu tác động trong 3.4.6. từ tác động tự do trở thành tác động hiệu quả thì kết quả thu được sẽ như thế nào. Hay một vấn đề có thể được đặt ra là chúng ta có thể xây dựng được hay không một lớp các không gian mà trên đó tồn tại các phân hoạch đẳng biến khi nhóm p -adic tác động lên chúng. Thậm chí là đi tìm một phản ví

dụ cho phỏng đoán Hilbert – Smith với đa tạp có số chiều lớn hơn hoặc bằng bốn.

Cuối cùng, tôi hy vọng sẽ có được cơ hội được nghiên cứu sâu hơn để tìm câu trả lời cho các vấn đề vừa nêu trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Anh

1. Bestvina. M, *Characterizing k -dimensional universal Menger compacta*, Memoirs of the American Mathematical Society, Volume 71, Number 380, 1988.
2. Bing. R. H, *Partitioning a Set*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 1101-1110.
3. Bing. R. H and Floyd. E. E, *Coverings with Connected Intersections*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 387–391.
4. Bredon. G. E, Raymond. F, and Williams. R. F, *p -adic groups of transformations*, Transactions of the American Mathematical Society **99** (1961), 488–498.
5. Dranishnikov. A. N, *On free actions of zero-dimensional compact groups*, Izv. Akad. Nauk USSR **32** (1988), 217–232.
6. Engelking. R, *General Topology*, Warsaw: Polish Scientific Publishers, (1977).
7. Pardon. J, *The Hilbert-Smith conjecture for three-manifolds*, Submitted, April, 2012.
8. Pontryagin. L. S, *Topological Groups*, Classics of Soviet Mathematics, New York: Gordon and Breach, (1986).
9. Whyburn. G. T, *Analytic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol XXVIII, New York: American Mathematical Society, (1942).
10. Yang. C. T, *p -adic transformation groups*, Michigan Mathematics Journal **7** (1960), 201–218.
11. Yang. Z, *A construction of classifying spaces for p -adic group actions*, Topology and its Applications **153** (2005), 161–170.

Trang web

12. [wolfweb.unr.edu/ The higher homotopy groups.pdf](http://wolfweb.unr.edu/~The%20higher%20homotopy%20groups.pdf)

13. www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATch4.pdf